

# Fórmulas explícitas para el cálculo sísmico de entramados planos regulares<sup>(\*)</sup>

Por AVELINO SAMARTIN  
LUIS MORENO

Dpto. Análisis Estructuras  
UNIVERSIDAD DE SANTANDER

*Se obtienen las soluciones explícitas de las ecuaciones dinámicas del movimiento de estructuras de edificación con características regulares. Se estudian los dos casos extremos correspondientes a la viga de corte y a la flexión total en los soportes. Asimismo, se analiza el caso general intermedio representado por una relación arbitraria entre las rigideces de los dinteles y los soportes. Se presentan algunos ejemplos de aplicación de las fórmulas obtenidas.*

## 1. INTRODUCCION

En el cálculo de un edificio bajo acciones sísmicas es frecuente la utilización de un método basado en las fuerzas estáticas equivalentes. En esencia este método consiste en la consideración de un coeficiente sísmico, que permita obtener las acciones horizontales a partir de las cargas gravitatorias actuantes. En el caso de una estructura de edificación, estas cargas horizontales se consideran puntuales y aplicadas a la altura de los forjados, en los que se suponen se concentran todas las masas entre pisos. Los esfuerzos — momentos flectores y cortantes — de la estructura se deducen mediante un cálculo estático adecuado y los resultados se suman a los producidos por las cargas normales (peso propio, concargas y sobrecargas de uso y extraordinarias) de acuerdo con las normas correspondientes.

La aproximación que supone la utilización del método de las fuerzas estáticas equivalentes puede ser muy grosera en numerosos casos, puesto que el seísmo es una acción dinámica compleja, que impone a las estructuras condiciones muy severas de resistencia, normalmente dentro del rango no elástico. En (1) se comentan algunas de las implicaciones de esta aproximación.

Las normas sísmicas actuales suelen basarse en procedimientos de cálculo verdaderamen-

te dinámicos de estructuras, si bien aplicando técnicas simplificadas que no demandan importantes recursos de computación. En este contexto, el método del espectro de respuesta que representa una forma simplificada del análisis modal, es el más extendido.

En este método se determinan las primeras frecuencias y modos más significativos, y mediante la utilización de un espectro de respuesta se obtienen las máximas respuestas de las distintas magnitudes correspondientes a cada modo. La superposición de los resultados deducidos para los distintos modos se efectúa mediante una regla arbitraria (raíz cuadrada de suma de cuadrados, suma de valores absolutos, etc.) que conduce en general a valores al lado de la seguridad.

Si bien el procedimiento es válido dentro de un análisis lineal, es posible considerar el comportamiento plástico de la estructura mediante la elección de apropiados factores de ductilidad y la consiguiente reducción de las ordenadas de los espectros de respuesta a considerar.

El método del espectro de respuesta se resume a continuación:

Las ecuaciones de equilibrio dinámico de una estructura con  $N$  grados de libertad (gdl), sometida a un seísmo definido por el registro de su movimiento horizontal  $u_g(t)$  son (2):

$$\underline{m}\ddot{\underline{u}} + \underline{c}\dot{\underline{u}} + \underline{k}\underline{u} = -\underline{m}\underline{r}u_g(t) \quad [1]$$

con  $\underline{m}$ ,  $\underline{c}$  y  $\underline{k}$  matrices de masa, amortigua-

(\*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de septiembre de 1986.

# FORMULAS EXPLICITAS PARA EL CALCULO SISMICO DE ENTRAMADOS PLANOS REGULARES

miento y rigidez de la estructura, de dimensión  $(N \times N)$ .

$\underline{u}$  vector de movimientos dinámicos en los gdl de la estructura, con dimensión  $(N \times 1)$ .

$\underline{r}$  vector geométrico que describe la influencia del movimiento horizontal unitario en la cimentación sobre los movimientos en los gdl de la estructura en régimen pseudoestático.

$$(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{dt}$$

Los  $N$  modos  $\phi_n$  y frecuencias  $\omega_n$  ( $\psi_n = 1, 2, \dots, N$ ) de la estructura se obtienen del sistema homogéneo:

$$(\underline{k} - \omega_n^2 \underline{m}) \phi_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad [1.2]$$

La siguiente transformación de coordenadas desacopla el sistema de ecuaciones diferenciales (1.1):

$$\underline{u} = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(t)$$

$$\ddot{q}_n + 2\eta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\frac{L_n}{m_n^*} \ddot{u}_g(t) \quad [1.3]$$

con

$$m_n^* = \phi_n^T \underline{m} \phi_n \text{ la masa reducida del modo } n$$

$$\eta_n = \frac{c_n}{2m_n^* \omega_n} \text{ el porcentaje de amortiguamiento}$$

crítico correspondiente al modo  $n$

$$L_n = \phi_n^T \underline{m} \underline{r}$$

el factor de participación del modo  $n$ .

La matriz  $\underline{c}$  se supone que es de amortiguamiento ortogonal, es decir, se satisfacen las igualdades:

$$\phi_n^T \underline{c} \phi_m = 0 \quad \text{si} \quad m \neq n$$

$$\phi_n^T \underline{c} \phi_n = c_n^*$$

El factor  $L_n/m_n^*$  se denomina masa efectiva del modo  $n$ . Si se conoce el espectro de respuesta de la pseudovelocity  $S_v(\omega, \eta)$  del terremoto actuante en la estructura, se puede

escribir el valor máximo de la coordenada generalizada  $q_n(t)$ :

$$q_{n\max} = \frac{L_n}{m_n^* \omega_n} S_v(\omega_n, \eta_n) \quad [1.4]$$

Las fuerzas elásticas máximas equivalentes actuando en los gdl de la estructura, correspondientes al modo  $n$  son:

$$f_{n\max} = \frac{L_n}{m_n^*} \underline{m} \phi_n S_a(\omega_n, \eta_n) \quad [1.5]$$

con

$$S_a(\omega_n, \eta_n) = \omega_n S_v(\omega_n, \eta_n)$$

Con las fuerzas estáticas definidas en (1.5) se procede para cada modo  $n$  al cálculo estático de la estructura, obteniéndose resultados de interés (momentos flectores, flechas, etc.) que para una sección arbitraria fijada se designan por  $R_{n\max}$ .

La combinación de estos valores máximos, de cada modo  $n$ , que no se producen simultáneamente se lleva a cabo de un modo heurístico mediante la fórmula adecuada en la mayoría de las situaciones:

$$R_{\max} = \sqrt{\sum_{n=1}^N R_{n\max}^2} \quad [1.6]$$

En estructuras normales de edificación no se precisa la evaluación de todos los  $N$  modos, bastando un número muy reducido. Un valor usual es considerar únicamente los tres primeros modos correspondientes a las frecuencias más bajas.

El objetivo de este artículo consiste en presentar unas expresiones explícitas de los modos, frecuencias, masas efectivas y fuerzas elásticas máximas equivalentes para un espectro normalizado, de estructuras entramados planos regulares. De este modo el cálculo dinámico de este tipo estructural es inmediato. La formulación aquí presentada puede extenderse a otros casos de estructuras irregulares dentro de una aproximación suficiente.

Se estudian dos casos extremos, uno correspondiente a rigidez infinita en dinteles y el otro

con rigidez a flexión nula. Finalmente se analiza una situación intermedia, con rigideces finitas en dinteles y soportes.

## 2. MODELO VIGA DE CORTANTE

### 2.1 Caso discreto. Edificio de N plantas

Se supone que el edificio de N plantas, cada una de ellas infinitamente rígida a flexión y unidas entre si por soportes con una rigidez total al corte igual a k.

La masa se concentra en cada planta, con un valor m, como se indica en la figura. El número total de grados de libertad es N, un desplazamiento vertical por piso o bien una fuerza eficaz con dicho movimiento. (Figura 1).

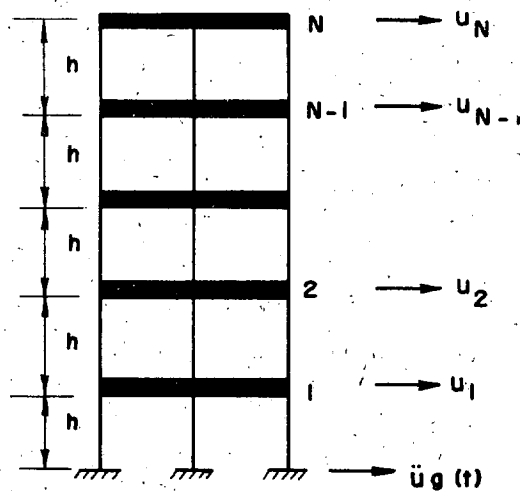


Figura 1.—Modelo de viga cortante. Edificio de N plantas.

Las ecuaciones de equilibrio dinámico para la planta j (se supone existe un amortiguamiento sísmico c) bajo la actuación de un seísmo  $\ddot{u}_g(t)$  son:

$$m\ddot{u}_j + c u_j - k u_{j-1} + 2k u_j - k u_{j+1} = -m\ddot{u}_g \quad [2.1]$$

Las condiciones de borde son:

$$u_0 = 0$$

$$u_{N+1} = u_N$$

Si se denomina  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , las vibraciones libres no amortiguadas se obtienen de las ecuaciones:

$$\ddot{u} + \omega_0^2(-u_{j+1} + 2u_j + u_{j-1}) = 0$$

$$(j = 1, 2, \dots, N) \quad [2.2]$$

La obtención de los modos y frecuencias de la estructura se lleva a cabo de la forma usual, es decir, se hace:

$$u_j = \phi_j e^{i\omega t} \quad \text{con} \quad i = \sqrt{-1} \quad [2.3]$$

y por consiguiente:

$$-\omega^2 \phi_j + \omega_0^2(-\phi_{j+1} + 2\phi_j - \phi_{j-1}) = 0 \quad [2.4]$$

y resulta la siguiente ecuación de recurrencia:

$$\phi_{j+1} - 2(1 - \bar{\omega}^2)\phi_j + \phi_{j-1} = 0 \quad [2.5]$$

con 
$$\bar{\omega}^2 = \frac{\omega}{2\omega_0^2}$$

La solución de la ecuación [2.5] es:

$$\phi = C_1 \cos \alpha j + C_2 \sin \alpha j \quad [2.6]$$

siendo  $\alpha = \cos^{-1}(1 - \bar{\omega}^2)$

Las condiciones de contorno permiten deducir los N distintos autovalores.  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_n$  y los correspondientes autovectores.

$$\phi_n = \{ \phi_{1n}, \phi_{2n}, \dots, \phi_{Nn} \}^T = \{ \phi_n \}^T$$

con

$$n = 1, 2, \dots, N.$$

Se obtiene, de esta forma:

$$\alpha_n = \frac{2n-1}{2N+1} \pi$$

es decir

$$\bar{\omega}_n = \sqrt{2} \sin \left( \frac{2n-1}{2N+1} \frac{\pi}{2} \right)$$

o bien:

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2N+1} \frac{\pi}{2}\right) \quad [2.7]$$

Los autovectores o modos de vibración correspondientes son:

$$\phi_n = \{ \operatorname{sen} \alpha_n, \operatorname{sen} 2\alpha_n, \dots, \operatorname{sen} j\alpha_n, \dots, \operatorname{sen} N\alpha_n \}^T \quad [2.8]$$

La masa reducida de cada modo es:

$$m_n^* = \phi_n^T m \phi_n = m \phi_n^T \phi_n = m \sum_{j=1}^N \operatorname{sen}^2 j\alpha_n$$

es decir

$$m_n^* = m \frac{2N+1}{4} \quad [2.9]$$

Análogamente el coeficiente de participación sísmico del modo n es:

$$L_n = \phi_n^T m \underline{r} = m \phi_n^T \underline{r} = m \sum_{j=1}^N \operatorname{sen} j\alpha_n$$

o sea

$$L_n = \frac{m}{2} \cot\left(\frac{2n-1}{2N+1} \frac{\pi}{2}\right) \quad [2.10]$$

La masa efectiva del modo, n es:

$$\frac{L_n^2}{m_n^*} = \frac{m}{2N+1} \cot^2\left(\frac{2n-1}{2N+1} \frac{\pi}{2}\right) \quad [2.11]$$

Se comprueba que la suma de las masas efectivas es igual a la masa total, es decir:

$$\sum_{n=1}^N \frac{L_n^2}{m_n^*} = \frac{m}{2N+1}$$

$$\sum_{n=1}^N \cot^2\left(\frac{2n-1}{2N+1} \frac{\pi}{2}\right) = mN$$

Finalmente se deducen los siguientes resultados de diseño para cada modo n:

Cortante total en la base:

$$Q_n \max = \frac{mg}{2N+1} \cot^2\left(\frac{2n-1}{2N+1} \frac{\pi}{2}\right) S_a(\omega_n, \eta_n) \quad [2.12]$$

siendo

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2N+1} \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\eta_n = \frac{C}{2m\omega_n}$$

$S_a(\omega_n, \eta_n)$  la ordenada en fracción de g (aceleración de la gravedad) del espectro de respuesta de aceleración de diseño.

Las fuerzas equivalentes en la planta j son:

$$f_{j\max} = \frac{2}{2N+1} \cot\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) m \operatorname{sen} j\alpha_n \cdot S_a(\omega_n, \eta_n)$$

es decir

$$f_{j\max} = Q_n \max \frac{2 \operatorname{sen} j\alpha_n}{\cot\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)}$$

$$= Q_n \max \frac{2 \operatorname{sen}\left(j \frac{2n-1}{2N+1} \frac{\pi}{2}\right)}{\cot\left(\frac{2n-1}{2N+1} \frac{\pi}{2}\right)} \quad [2.13]$$

## 2.2 Caso límite. Viga continua de cortante

Si se supone que el número de piso es muy elevado, es posible, asimilar su comportamiento dinámico a una viga continua de cortante como se indica en la figura 2.

En este caso, se puede escribir para una rebanada elemental:

$$\frac{du}{dx} - \alpha = \theta \quad [2.14]$$

Donde  $\theta$ , giro de flexión.

$\alpha$ , ángulo debido al cortante, siendo  $\alpha = \frac{\tau}{G}$  con  $\tau$  la tensión tangencial y G módulo de corte

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

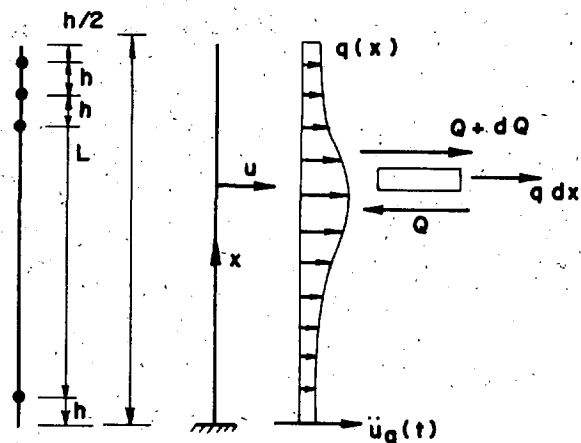


Figura 2.—Modelo de viga cortante. Viga continua.

Las vibraciones forzadas por una acción sísmica  $u_g(t)$  aplicada en la base se rigen por la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( GA \frac{\partial u}{\partial x} \right) - c \frac{\partial u}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} \quad [2.20]$$

con las condiciones [2.19] de borde anteriores y las iniciales pertinentes (usualmente  $u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$  para todo  $x$ ).

Para la resolución del problema [2.18] se procede mediante el método de separación de variables:

$$u = X(x) T(t) \quad [2.21]$$

resultando, al sustituir [2.21] en [2.18] y suponer que  $GA$  y  $\rho$  son constantes independientes de la abscisa  $x$ , la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\mu^2} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 \quad [2.22]$$

con  $\mu^2 = \frac{\rho}{GA}$  y  $\omega$ , el autovalor.

La resolución de la ecuación [2.22] con las condiciones de contorno [2.19] e iniciales nulas conduce a los resultados:

$$\begin{aligned} X &= X_0 \text{sen}(\mu \omega x) \\ T &= T_0 \text{sen}(\omega t) \end{aligned} \quad [2.23]$$

siendo  $\omega$  una de las soluciones (autovalores) de la ecuación característica:

$$\cos \mu \omega L = 0$$

es decir

$$\omega_n = \frac{2n-1}{\mu L} \frac{\pi}{2} \quad [2.24]$$

Las correspondientes autofunciones o modos de vibración son:

$$\begin{aligned} \phi_n &= X_n(x) = \text{sen} \mu \omega_n x = \\ &= \text{sen} \left\{ (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{L} \right\} \end{aligned} \quad [2.25]$$

En la viga de cortante  $\theta = 0$ , por lo que resulta

$\alpha = \frac{du}{dx}$ , y por consiguiente

$$\tau = \frac{Q}{A} = G\alpha = G \frac{du}{dx} \quad [2.15]$$

con  $A$  el área reducida de cortante.

La ecuación de equilibrio de una rebanada elemental conduce a la expresión:

$$\frac{dQ}{dx} + q = 0 \quad [2.16]$$

es decir, si se considera [2.15] se deduce:

$$\frac{d}{dx} \left( GA \frac{du}{dx} \right) + q = 0 \quad [2.17]$$

Si  $q = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  se obtiene la ecuación dinámica de las vibraciones libres no amortiguadas ( $\rho$  es la masa por unidad de longitud).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( GA \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad [2.18]$$

con las condiciones de borde:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 0 \quad \text{para } x = 0 \quad \text{y todo } t \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= 0 \quad \text{para } x = L \quad \text{y todo } t \end{aligned} \quad [2.19]$$

Se comprueba que la contrapartida discreta de las expresiones [2.24] y [2.25] son las [2.7] y [2.8] respectivamente, en las que se suponen los siguientes valores para las características de la viga continua:

$$GA = kh = \frac{12EI}{h^2} (M + 1)$$

$$e = \frac{m}{h} \quad [2.26]$$

con  $h$  la distancia entre plantas consecutivas y  $M + 1$  el número de soportes que unen estas plantas. Se supone  $EI$  la rigidez de cada uno de estos soportes sin masa.

En esta situación se puede escribir:

$$L = \frac{2N + 1}{2} h$$

y por consiguiente, la expresión [2.24] se convierte en:

$$\omega_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{kh^2}{m}} \frac{1}{L} =$$

$$= \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{2n - 1}{2N + 1} \frac{\pi}{2} \quad [2.27]$$

que coincide con [2.7] para  $N$  muy grande.

Análogamente la autofunción es:

$$\phi_n(x) = \text{sen} \left( \frac{2n - 1}{2N + 1} \frac{x}{h} \right)$$

cuyo valor para la planta  $j$  ( $x = jh$ ) es:

$$\phi_{jn} = \text{sen} \left( j \frac{2n - 1}{2N + 1} \pi \right) = \text{sen}(\alpha_{nj})$$

La resolución del problema de vibraciones forzadas es análogo al caso discreto, resultando:

$$m_n^* = \int_0^L \phi_n^2(x) e \, dx = \frac{L}{2} e = m \frac{2N + 1}{L}$$

$$L_n = \int_0^L \phi_n(x) e \, dx =$$

$$= \frac{2L}{2n - 1} \frac{e}{\pi} = m \frac{2N + 1}{2n - 1} \frac{1}{\pi}$$

$$\text{con } \eta_n = \frac{c}{2\rho \omega_n}$$

Haciendo  $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x)$ , se obtienen:

$$\ddot{q}_n + 2\eta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{4}{(2n - 1)} \ddot{u}_g(t)$$

$$\text{con } \eta_n = \frac{c}{2\rho \omega_n}$$

con lo que resulta  $q_{\max} = S_d(\omega_n, \eta_n) \frac{L_n}{m_n^*}$

Si se denomina  $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x)$$

se puede escribir

$$u_{n\max}(x) = \phi_n(x) \frac{L_n}{m_n^* \omega_n} S_v(\omega_n, \eta_n)$$

Las fuerzas equivalentes son:

$$f_{n\max}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left( GA \frac{\partial u_n}{\partial x} \right) =$$

$$= e \phi_n(x) \frac{L_n}{m_n^*} S_a(\omega_n, \eta_n)$$

y por consiguiente el cortante en la base es:

$$Q_{n\max} = \int_0^L f_{n\max}(x) \, dx = \frac{L_n^2}{m_n^*} S_a(\omega_n, \eta_n)$$

es decir

$$Q_{n\max} = \frac{8eL}{\pi^2 (2n - 1)^2} S_a(\omega, \eta) \quad [2.28]$$

y la distribución de las fuerzas queda definida como sigue:

$$f_{n\max}(x) = \frac{4}{(2N - 1)} e \phi_n(x) S_a(\omega_n, \eta_n)$$

es decir

$$f_{n\max}(x) = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{L} x$$

$$\text{sen}\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{L} x\right) O_{n\max} \quad [2.29]$$

### 3. MODELO VIGA DE FLEXION

#### 3.1 Caso discreto. Edificios de N plantas

Se supone que las masas están concentradas en los forjados cuya flexibilidad es muy pequeña en comparación con la de los soportes. El movimiento sísmico impuesto en el contacto de la estructura con la cimentación se designa por  $u_g(t)$ .

Se denomina  $k = \sum_{i=1}^{M+1} \frac{12EI}{h^3}$  con M número de vanos por planta (figura 3).

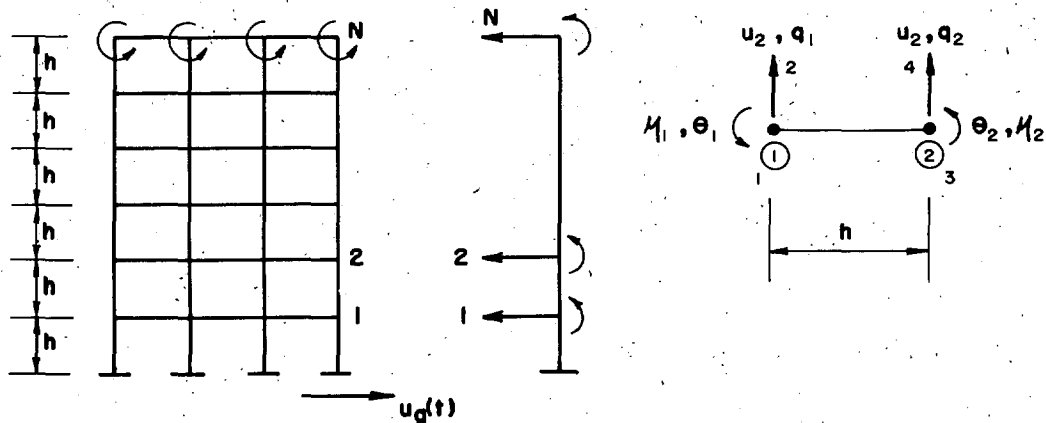
Los gdl considerados en movimientos son en cada nudo:

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} h \cdot \theta \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ u \end{bmatrix} \text{ y en fuerzas } \underline{p} = \begin{bmatrix} M/h \\ q \end{bmatrix}$$

y la masa rotatoria es despreciable.

La matriz de rigidez de un elemento es (figura 3c)

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{12} \\ \underline{k}_{21} & \underline{k}_{22} \end{bmatrix} \quad [3.1]$$



(a) Estructura real. (b) Modelo. (c) Gdl del elemento.

Figura 3.—Modelo de viga de flexión. Edificio de N plantas.

siendo

$$k_{11} = k \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad k_{22} = k \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_{12} = k_{21} = k \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

La ecuación de equilibrio dinámico de la planta j es:

$$k_{21} d_{j-1} + (k_{11} + k_{22}) d_j + k_{12} d_{j+1} + m \ddot{d}_j = -m \ddot{u}_g(t) \quad [3.2]$$

siendo

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} \frac{m_\theta}{h} & 0 \\ 0 & m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix};$$

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{d}_j = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_j \\ u_j \end{bmatrix}$$

y con las siguientes condiciones de contorno:

$$\bar{\theta}_0 = 0 \quad ; \quad u_0 = 0$$

$$\bar{\theta}_{N+1} = \bar{\theta}_N \quad ; \quad u_{N+1} = \bar{\theta}_N + u_N \quad [3.3]$$

Las vibraciones libres y amortiguados se obtienen de la ecuación:

$$\underline{k}_{21} \underline{d}_{j-1} + (\underline{k}_{11} + \underline{k}_{22}) \underline{d}_j + \underline{k}_{12} \underline{d}_{j+1} - \omega^2 \underline{m} \underline{d}_j = 0 \quad [3.4]$$

Si se supone que  $\underline{d}_j = \begin{bmatrix} \bar{c} \\ c \end{bmatrix} r^j$ , la ecuación [3.4] se transforma en el siguiente sistema homogéneo:

$$r^{j-1} \{ \underline{k}_{21} + (\underline{k}_{11} + \underline{k}_{22}) r + \underline{k}_{12} r^2 - \omega^2 \underline{m} r \} \begin{bmatrix} \bar{c} \\ c \end{bmatrix} = \underline{0}$$

con soluciones no triviales si se satisface la condición de determinantes nulo:

$$\| \underline{k}_{21} + (\underline{k}_{11} + \underline{k}_{22}) r + \underline{k}_{12} r^2 - \omega^2 \underline{m} r \| = 0$$

es decir

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{6} (r^2 + 4r + 1) & -\frac{1}{2} (r^2 - 1) \\ \frac{1}{2} (r^2 - 1) & -r^2 + (2 - \bar{\omega}^2) r - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad [3.5]$$

en donde se ha denominado  $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{k/m}}$

Se procede al cambio de variable siguiente en la ecuación [3.5]:

$$z = r + \frac{1}{r}$$

con lo que resulta

$$z^2 - 2(2 + \bar{\omega}^2)z - 4(2\bar{\omega}^2 - 1) = 0 \quad [3.6]$$

La ecuación [3.6] presenta dos raíces reales ya que su discriminante es siempre positivo, en efecto:

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (2 + \bar{\omega}^2)^2 + 4(2\bar{\omega}^2 - 1) = \\ &= \bar{\omega}^2 (12 + \bar{\omega}^2) > 0 \end{aligned}$$

Con objeto de resolver la ecuación [3.5] se introduce el siguiente parámetro auxiliar  $\psi$  ( $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$ ), definido como sigue:

$$\text{Caso 1. Si } \bar{\omega} > \frac{1}{2}, \quad \cot \psi = \frac{\bar{\omega}^2 + 2}{22\bar{\omega}^2 - 1}$$

con lo que las raíces son

$$z_1 = 2\sqrt{2\bar{\omega}^2 - 1} \cdot \cot \psi / 2$$

$$z_2 = -2\sqrt{2\bar{\omega}^2 - 1} \cdot \text{tg } \psi / 2$$

$$\text{Caso 2. - Si } \bar{\omega} < \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \text{sen } \psi = \frac{2\sqrt{1 - 2\bar{\omega}^2}}{2\bar{\omega}^2}$$

y las raíces

$$z_1 = z(2 + \bar{\omega}^2) \cos^2(\psi/2)$$

$$z_2 = z(2 + \bar{\omega}^2) \text{sen}^2(\psi/2)$$

Para cada uno de los casos anteriores, se deducen los valores de las cuatro raíces  $r_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) de la ecuación [3.5] de acuerdo con el siguiente procedimiento.

$$\text{Caso 1. - } \bar{\omega} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Se puede comprobar que existe un límite superior para  $\bar{\omega}$ , es decir  $\bar{\omega} < 2$ , por lo que se cumple que

$$\sqrt{2\bar{\omega}^2 - 1} \cdot \text{tg } \frac{\psi}{2} < 1$$

Las raíces de la ecuación [3.5] son:

$$r_1 = e^{\alpha_1} \quad ; \quad r_2 = e^{-\alpha_1}$$

$$r_3 = e^{\alpha_2 \sqrt{-1}} \quad ; \quad r_4 = e^{-\alpha_2 \sqrt{-1}}$$

con

$$\text{Ch } \alpha_1 = \sqrt{2\bar{\omega}^2 - 1} \cdot \cot \frac{\psi}{2};$$

$$\cos \alpha_2 = -\sqrt{2\bar{\omega}^2 - 1} \cdot \text{tg } \frac{\psi}{2}$$



# FORMULAS EXPLICITAS PARA EL CALCULO SISMICO DE ENTRAMADOS PLANOS REGULARES

Por consiguiente los movimientos de piso  $j$  (modos de vibración) son:

$$u_j = A_1 \operatorname{Ch} \alpha_1 j + A_2 \operatorname{Sh} \alpha_1 j + A_3 \cos \alpha_2 j + A_4 \operatorname{sen} \alpha_2 j \quad [3.7]$$

$$\bar{\theta}_j = \bar{A}_1 \operatorname{Ch} \alpha_1 j + \bar{A}_2 \operatorname{Ch} \alpha_1 j + \bar{A}_3 \cos \alpha_2 j + \bar{A}_4 \operatorname{sen} \alpha_2 j$$

con  $\bar{A}_1 = A_2 \lambda_1$  ;  $\bar{A}_2 = A_1 \lambda_1$

$$\bar{A}_3 = A_4 \lambda_2$$
 ;  $\bar{A}_4 = -A_3 \lambda_2$

$$\lambda_1 = \frac{3 \operatorname{Sh} \alpha_1}{\operatorname{Ch} \alpha_1 + 2}$$
 ;  $\lambda_2 = \frac{3 \operatorname{sen} \alpha_2}{\cos \alpha_2 + 2}$

La consideración de las condiciones de contorno [3.3] conduce al sistema característico:

$$A_1 + A_3 = 0$$

$$A_2 \lambda_1 + A_4 \lambda_2 = 0$$

$$A_1 \lambda_1 (S_{N+1} - S_N) + A_2 \lambda_1 (C_{N+1} - C_N) - A_3 \lambda_2 (s_{N+1} - s_N) + A_4 \lambda_2 (c_{N+1} - c_N) = 0 \quad [3.8]$$

$$A_1 (C_{N+1} - C_N - \lambda_1 S_N) +$$

$$+ A_2 (S_{N+1} - S_N - \lambda_1 C_N) +$$

$$A_3 (c_{N+1} - c_N + \lambda_2 s_N) +$$

$$+ A_4 (s_{N+1} - s_N - \lambda_2 c_N) = 0$$

con  $C_N = \operatorname{Ch} N \alpha_1$  ;  $S_N = \operatorname{Sh} N \alpha_1$  ;

$$c_N = \cos N \alpha_2$$
 ;  $s_N = \operatorname{sen} N \alpha_2$  ;

Denominando  $A_1 = -A_3 = A$

$$A_2 \lambda_1 = -A_4 \lambda_2 = B \lambda_1 \lambda_2$$

se obtiene

$$A (\lambda_1 A_1^* + \lambda_2 A_2^*) + B \lambda_1 \lambda_2 (B_1^* - B_2^*) = 0 \quad [3.9]$$

$$A (B_1^* - B_2^* - \lambda_1 S_N - \lambda_2 s_N) +$$

$$B (\lambda_2 A_1^* - \lambda_1 A_2^* - \lambda_1 \lambda_2 (C_N - c_N)) = 0$$

siendo

$$A_1^* = S_{N+1} - S_N = (C_1 - 1) S_N + C_N S_1$$

$$B_1^* = C_{N+1} - C_N = (C_1 - 1) C_N + S_N S_1$$

$$A_2^* = s_{N+1} - s_N = (c_1 - 1) s_N + c_N s_1$$

$$B_2^* = c_{N+1} - c_N = (c_1 - 1) c_N - s_N s_1$$

La ecuación resultante de imponer una solución distinta de la trivial en el sistema [3.9] permite calcular los valores de  $\omega$  (frecuencias). Esta ecuación es:

$$\lambda_1 A_1^* + \lambda_2 A_2^* \{ \lambda_2 A_1^* - \lambda_1 A_2^* - \lambda_1 \lambda_2 (C_N - c_N) \} - \lambda_1 \lambda_2 (B_1^* - B_2^*) (B_1^* - B_2^* - \lambda_1 S_N - \lambda_2 s_N) = 0 \quad [3.10]$$

Caso 2. —  $\bar{\omega} > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Se comprueba asimismo que siempre se produce la desigualdad  $(2 + \bar{\omega}^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\psi}{2}) < 1$ , es de

cir  $\omega^{-2} > 0$ , por lo que resultan las siguientes raíces para la ecuación [3.5]

$$r_1 = e^{\alpha_1} ; \quad r_2 = e^{-\alpha_1}$$

$$r_3 = e^{\alpha_2 \sqrt{-1}} ; \quad r_4 = e^{-\alpha_2 \sqrt{-1}}$$

siendo 
$$\text{Ch } \alpha_1 = (2 + \bar{\omega}^2) \cos^2 \frac{\psi}{2} ;$$

$$\cos \alpha_2 = (2 + \bar{\omega}^2) \sin^2 \frac{\psi}{2} ;$$

y el proceso de cálculo es idéntico al caso anterior, obteniéndose idéntica ecuación característica [3.10] para determinar las frecuencias fundamentales.

Una vez deducidas las frecuencias de vibración según las expresiones [3.7] es posible calcular los modos  $\phi_n$  correspondientes, obteniéndose los resultados:

$$\phi_n = \{ \theta_{jn}, u_{jn} \} \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

con

$$u_{jn} = M (\text{Ch } \alpha_1 j - \cos \alpha_2 j) +$$

$$+ N (\lambda_2 \text{Sh } \alpha_1 j - \lambda_1 \text{sen } \alpha_2 j)$$

$$\bar{\theta}_{jn} = M (\lambda_1 \text{Sh } \alpha_1 j + \lambda_2 \text{sen } \alpha_2 j) +$$

$$+ N \lambda_1 \lambda_2 (\text{Ch } \alpha_1 j - \cos \alpha_2 j)$$

Por otra parte la masa reducida de cada modo es:

$$m_n^* = m \sum_{j=1}^N u_{jn}^2 \quad [3.11]$$

El coeficiente de participación sísmico del modo n es:

$$L_n = m \sum_{j=1}^N u_{jn} \quad [3.12]$$

Las fuerzas equivalentes en la planta j para el armónico n son:

$$f_{jn \max} = \frac{L_n}{m_n} m \cdot u_{jn} g S_a(\omega_n, \eta_n) \quad [3.13]$$

### 3.2 Caso límite. Viga continua a flexión

Se considera  $EI = \sum_{n=1}^N EI$  con M el número de vanos por planta. Se supone que los soportes extremos tienen una inercia mitad de la de los interiores.

La masa unitaria es  $\rho = \frac{m}{h}$  y la luz  $L = \frac{2N+1}{2} h$ . Con estos parámetros continuos, la ecuación del movimiento de la viga continua a flexión es:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} \quad [3.14]$$

Si la sección es constante se escribe:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} \quad [3.15]$$

Las coordenadas x se especifica para las alturas de los pisos.

$$x = jh \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

En el caso de vibraciones libres no amortiguadas resulta:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Mediante separación de variables  $u(x,t) = X(x)T(t)$  se deducen las dos ecuaciones:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 T$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \{ EI \frac{d^2 X}{dx^2} \} = \rho \omega^2 X$$

Si se suponen inercia y masa distribuidas uniformemente se obtiene:

$$T = T_0 \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$X(x) = \phi = A_1 \text{Ch} \lambda x + A_2 \text{Sh} \lambda x + A_3 \cos \lambda x + A_4 \text{sen} \lambda x$$

con 
$$\lambda^4 = \frac{\rho \omega^2}{EI}$$

En el caso de condiciones de contorno de voladizo, es decir:

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{para } x = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad \text{para } x = L$$

se deducen los sucesivos modos y frecuencias de vibración:

$$X(x) = \phi_n(x) = A_n (\text{Ch} \lambda_n x - \cos \lambda_n x) - (\text{Sh} \lambda_n x - \text{sen} \lambda_n x)$$

con 
$$A_n = \frac{\text{Ch} \lambda_n L + \cos \lambda_n L}{\text{Sh} \lambda_n L - \text{sen} \lambda_n L}$$

El autovalor  $\lambda_n$  debe satisfacer la ecuación:

$$\text{Ch} \lambda_n L \cos \lambda_n L = -1$$

que permite obtener la pulsación  $\lambda_n$  correspondiente. Los primeros valores son:

$$\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 L = 1.8751; \quad \bar{\lambda}_2 = \lambda_2 L = 4.6941;$$

$$\bar{\lambda}_3 = \lambda_3 L = 7.8548;$$

$$y \omega_n = \bar{\lambda}_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}}$$

Las restantes características dinámicas del modo n son:

$$m_n^* = \int_0^L \phi_n^2(x) \rho dx = \rho \frac{L}{4} (2A_n)^2 = \rho LA_n^2$$

$$L_n = \int_0^L \phi_n(x) \rho dx = \frac{2\rho L}{\lambda_n L}$$

$$Q_{n\max} = \frac{4\rho g L}{A_n^2} S_a(\omega_n, \eta_n)$$

$$f_{jn\max} = \frac{L_n}{m_n^*} \rho \phi_n(x) g S_a(\omega_n, \eta_n)$$

#### 4. MODELO GENERAL DE VIGA A FLEXO-CORTANTE

##### 4.1 Caso discreto. Edificio de N plantas

Se considera ahora una situación intermedia entre los dos extremos anteriores, es decir, un entramado plano con rigideces finitas y no nulas en soportes y dinteles como se indica en la figura 4 para dos entreplantas consecutivas.

Se denomina  $\lambda = \frac{R}{R'}$  y  $k = 2 \frac{R'(1 + \gamma)}{h^2} M$

La ecuación dinámica del movimiento es, para la planta n:

$$\underline{k}_{21} \underline{d}_{n-1} + (\underline{k}_{11} + \underline{k}_{22}) \underline{d}_n + \underline{k}_{12} \underline{d}_{n+1} + m \underline{\ddot{d}}_n = -m \underline{r} \ddot{u}_g(t)$$

con

$$\underline{d}_n = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_n \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & \theta_n \\ & u_n \end{bmatrix}$$

$$m = \begin{bmatrix} m_\theta & 0 \\ 0 & m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

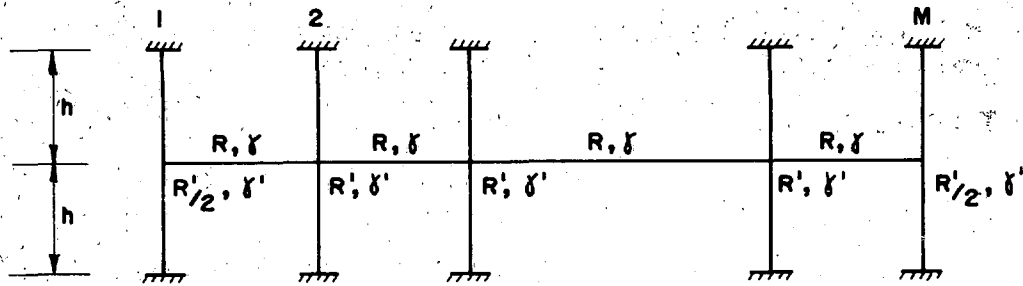


Figura 4. — Planta genérica. Modelo general de viga a flexocortante.

$$k_{12} = k_{21}^T = k \begin{bmatrix} \frac{\gamma'}{2(1+\gamma)} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$k_{11} + k_{22} = k \begin{bmatrix} \frac{1 + \lambda(1 + \gamma)}{1\gamma'} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vibraciones libres  $\ddot{u}_g(t) = 0$  y se supone que

$$\underline{d}_n = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_n \\ u_n \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$

con lo que resulta:

$$k_{21} d_{n-1} + (k_{11} + k_{22} - m\omega^2) d_n + k_{12} d_{n+1} = 0$$

Ecuación de recurrencia, que se resuelve haciendo

$$\underline{d}_n = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ C \end{bmatrix} r^n$$

y se deduce

$$r^{n-1} \{ \underline{k}_{21} + (\underline{k}_{11} + \underline{k}_{22} - \underline{m}\omega^2) r \} + \underline{k}_{12} r^2 \begin{bmatrix} \bar{C} \\ C \end{bmatrix} = \underline{0}$$

es decir, el siguiente determinante debe anularse si existen soluciones distintas de la trivial

$$\| \underline{k}_{21} + (\underline{k}_{11} + \underline{k}_{22} - \underline{m}\omega^2) r + \underline{k}_{12} r^2 \| = 0$$

o bien

$$\begin{vmatrix} \alpha + 2\beta r + \alpha r^2 & -1 + r^2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r^2 & -1 + 2(1 - \bar{\omega}^2) r - r^2 \end{vmatrix} = 0$$

siendo

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{m}{2k}}; \quad \alpha = \frac{\gamma'}{1 + \gamma'}$$

$$\beta = \frac{1 + \lambda(1 + \gamma)}{1 + \gamma}$$

En general si  $0 < \gamma < 1$ , se satisfacen las desigualdades

$$\beta > \alpha; \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}$$

Si se efectúa el cambio de variable en la ecuación [4.1],

$$z = r + \frac{1}{r}$$

ésta se transforma en la siguiente

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) z^2 + 2(\beta - \alpha(1 - \bar{\omega}^2)) z + 2 - 4\beta(1 - \bar{\omega}^2) = 0 \quad [4.2]$$

El discriminante  $\Delta$  de la ecuación [4.2] es siempre positivo, ya que su valor es:

$$\Delta = (\alpha + \beta - 1)^2 + 2(\beta - \alpha\beta - \alpha^2)\bar{\omega}^2 + \alpha^2\omega^{-4}$$

# FORMULAS EXPLICITAS PARA EL CALCULO SISMICO DE ENTRAMADOS PLANOS REGULARES

y  $\beta - \alpha\beta - \alpha^2 > 0$  para todo  $\alpha$  y  $\beta$ .

Denominando  $\omega_0^2 = 1 - \bar{\omega}^2$  la ecuación [4.2] se convierte en:

$$(1 - 2\alpha)z^2 + 2(\alpha\omega_0^2 - \beta)z + 2(2\beta\omega_0^2 - 1) = 0 \quad [4.3]$$

Existen por consiguiente dos raíces  $z_1$  y  $z_2$  reales de la ecuación [4.3] que pueden expresarse como sigue:

Caso 1. —  $\omega_0^2 < \frac{1}{2\beta}$

$$z_1 = + 2\sqrt{\frac{1 - 2\beta\omega_0^2}{1 - 2\alpha}} \cdot \cot \frac{\psi}{2}$$

$$z_2 = - 2\sqrt{\frac{1 - 2\beta\omega_0^2}{1 - 2\alpha}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$$

siendo  $\cot \psi = \frac{\beta - \alpha\omega_0^2}{\sqrt{(1 - 2\alpha)(1 - 2\beta\omega_0^2)}}$

$$(0 < \psi < \frac{\pi}{2})$$

Por cada valor  $z_i$  se obtienen dos soluciones de la ecuación [4.1], es decir, las cuatro raíces buscadas, son:

$$r_1 = e^{\alpha_1} ; \quad r_2 = e^{-\alpha_1}$$

$$r_3 = e^{\alpha_2\sqrt{-1}} ; \quad r_4 = e^{-\alpha_2\sqrt{-1}}$$

con

$$\operatorname{Ch} \alpha_1 = \sqrt{\frac{1 - 2\beta\omega_0^2}{1 - 2\alpha}} \cdot \cot \frac{\psi}{2}$$

$$\cos \alpha_2 = - \sqrt{\frac{1 - 2\beta\omega_0^2}{1 - 2\alpha}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$$

Los movimientos del piso  $j$  son:

$$\bar{\theta}_j = A_1 \operatorname{Ch} \alpha_1 j + A_2 \operatorname{Sh} \alpha_1 j +$$

$$+ A_3 \cos \alpha_2 j + A_4 \operatorname{sen} \alpha_2 j$$

$$u_j = A_1 \operatorname{Ch} \alpha_1 j + A_2 \operatorname{Sh} \alpha_1 j +$$

$$+ A_3 \cos \alpha_2 j + A_4 \operatorname{sen} \alpha_2 j$$

y el proceso sigue exactamente igual que para el caso de flexión de los soportes únicamente, es decir, con  $\lambda = 0$ , analizado en el apartado 3 anterior, considerando ahora los parámetros:

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{Sh} \alpha_1}{\alpha \operatorname{Ch} \alpha_1 + \beta}$$

$$\lambda_2 = \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\alpha \cos \alpha_2 + \beta}$$

Caso 2. —  $\omega_0^2 < \frac{1}{2\beta}$

Las raíces son:

$$z_1 = 4 \frac{\beta - \alpha\omega_0^2}{1 - 2\alpha} \cos^2 \frac{\psi}{2}$$

$$z_2 = 4 \frac{\beta - \alpha\omega_0^2}{1 - 2\alpha} \operatorname{sen}^2 \frac{\psi}{2}$$

siendo  $\operatorname{sen} \psi = \frac{\sqrt{(1 - 2\alpha)(2\beta\omega_0^2 - 1)}}{\beta - \alpha\omega_0^2}$

Las soluciones de la ecuación [4.1] son

$$r_1 = e^{\alpha_1} ; \quad r_2 = e^{-\alpha_1}$$

$$r_3 = e^{\alpha_2\sqrt{-1}} ; \quad r_4 = e^{-\alpha_2\sqrt{-1}}$$

con

$$\operatorname{Ch} \alpha_1 = 2 \frac{\beta - \alpha\omega_0^2}{1 - 2\alpha} \cos^2 \frac{\psi}{2} ;$$

$$\cos \alpha_2 = 2 \frac{\beta - \alpha \omega_0^2}{1 - 2\alpha} \frac{\psi}{2}$$

y se continua igual que en el caso anterior.

#### 4.2 Caso límite. Viga continua a flexo-cortante

Se considera la existencia de una deformación de cortante  $\alpha$ , y por consiguiente se puede escribir la generalización de la hipótesis de Navier.

$$\theta = \frac{du}{dx} - \alpha$$

Las ecuaciones constitutivas son:

$$Q = GA \alpha$$

$$M = EI \frac{d\theta}{dx}$$

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$Q = - \frac{dM}{dx}$$

$$q = - \frac{dQ}{dx}$$

La ecuación en rigidez es:

$$q = \frac{d^2 M}{dx^2} = EI \frac{d^3 \theta}{dx^3} = EI \frac{d^4 u}{dx^4} - EI \frac{d^3 \alpha}{dx^3}$$

o bien

$$q = EI \frac{d^4 u}{dx^4} + \frac{EI}{GA} \frac{d^2 q}{dx^2}$$

Si

$$q = -e \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u + u_g)$$

resulta:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{EI}{GA} e \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + e \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -e \frac{d^2 u_g}{dt^2}$$

Las vibraciones libres se deducen a partir de la ecuación:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{EI}{GA} e \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + e \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Si se supone

$$u = X(x) e^{i\omega t}$$

Se tiene

$$EI X^{IV} + \frac{EI}{GA} e \omega^2 X'' - p \omega^2 X = 0$$

es decir

$$X^{IV} + 2\lambda_1^2 X'' - \lambda_2^4 X = 0$$

con

$$\lambda_1^2 = \frac{e \omega^2}{2GA}; \quad \lambda_2^4 = \frac{e \omega^2}{EI};$$

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_2^4}{\lambda_1^4} > 0$$

La ecuación característica es:

$$r^4 + 2\lambda_1^2 r^2 - \lambda_2^4 = 0$$

en donde

$$r = \pm \sqrt{-\lambda_1^2 \pm \sqrt{\lambda_1^4 + \lambda_2^4}}$$

$$r = \pm \lambda_1 \sqrt{-1 \pm \sqrt{1 + \lambda_3}}$$

Sea

$$r_1 = \lambda_1 \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \lambda_3}};$$

$$r_2 = \lambda_1 \sqrt{1 + \sqrt{1 + \lambda_3}}$$

se deduce

$$X(x) = \phi(x) = A_1 \text{Ch} r_1 x + A_2 \text{Sh} r_1 x + A_3 \cos r_2 x + A_4 \text{sen} r_2 x$$

Imponiendo las condiciones de contorno de voladizo, es decir:

$$u = 0 ; \quad \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{para } x = 0$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0 ; \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = 0 \quad \text{para } x = L$$

se obtiene el siguiente sistema característico:

$$A_1 + A_3 = 0$$

$$A_2 r_1 + A_4 r_2 = 0$$

$$A_1 r_1^2 \text{Chr}_1 L + A_2 r_1^2 \text{Shr}_1 L -$$

$$- A_3 r_2^2 \cos r_2 L - A_4 r_2^2 \text{sen } r_2 L = 0$$

$$A_1 r_1^3 \text{Shr}_1 L + A_2 r_1^3 \text{Chr}_1 L +$$

$$+ A_3 r_2^3 \text{sen } r_2 L - A_4 r_2^3 \text{sen } r_2 L = 0$$

haciendo

$$A_1 = -A_3 = M$$

$$A_2 r_1 = -A_4 r_2 = N r_1 r_2$$

resulta

$$M(r_1^2 \text{Chr}_1 L + r_2^2 \cos r_2 L) +$$

$$+ N r_1 r_2 (r_1 \text{Shr}_1 L + r_2 \text{sen } r_2 L) = 0$$

$$M(r_1^3 \text{Shr}_1 L - r_2^3 \text{sen } r_2 L) +$$

$$+ N r_1 r_2 (r_1^2 \text{Chr}_1 L + r_2^2 \cos r_2 L) = 0$$

Los valores de  $\omega_n$  (frecuencias) se obtienen imponiendo la condición de existencia de una

solución distinta de la trivial, esto es:

$$(r_1^2 \text{Chr}_1 L + r_2^2 \cos r_2 L)^2 - (r_1 \text{Shr}_1 L + r_2 \text{sen } r_2 L)$$

$$(r_1^3 \text{Shr}_1 L - r_2^3 \text{sen } r_2 L) = 0$$

Obtenidas las frecuencias los modos de vibración correspondientes  $\phi_n$  resultan:

$$\phi_n(x) = M_n (\text{Chr}_{1n} x - \cos r_{2n} x) -$$

$$- (r_{2n} \text{Shr}_{1n} x - r_{1n} \text{sen } r_{2n} x)$$

Siendo

$$M_n = \frac{r_{1n} r_{2n} (r_{1n} \text{Shr}_{1n} L + r_{2n} \text{sen } r_{2n} L)}{r_{1n}^2 \text{Chr}_{1n} L + r_{2n}^2 \cos r_{2n} L}$$

El resto de las características dinámicas se obtienen de manera similar a la indicada en 3.2.

## 5. EJEMPLO DE APLICACION

A continuación se presenta un ejemplo de aplicación de los resultados anteriores referentes a una estructura plana regular de edificación, de cinco pisos, figura 5.

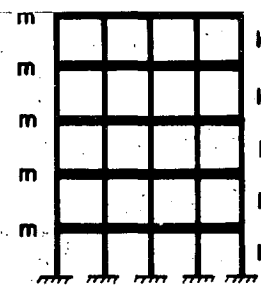


Figura 5. — Ejemplo de aplicación.

Se supone que la masa está concentrada en los dinteles, con un valor total  $m$  por piso. La rigidez al desplazamiento transversal de un piso es  $k$ . La actuación del terremoto se representa por un espectro de aceleraciones  $S_a(\omega, \eta)$  cuyas ordenadas son fracciones de  $g$ , es decir  $S_a(\omega, \eta)$  es un número adimensional.

TABLA I

Armónico	Viga de Corte					Viga de Flexión					Viga Flexo-Cortante ( $\lambda = 1$ )				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Frecuencias	0.2846	0.8308	1.3097	1.6825	1.9190	0.0338	0.2160	0.6122	1.1828	1.7606	0.2131	0.6402	1.0774	1.5156	1.8646
Módos de Vibración Componentes															
1	0.1699	0.4557	0.5969	0.5485	0.3260	0.0459	0.2291	0.4878	0.6478	0.5359	0.1351	0.3748	0.5524	0.6036	0.4145
2	0.3260	0.5969	0.1699	-0.4557	-0.5485	0.1670	0.5587	0.5439	-0.1340	0.5877	0.3038	0.5991	0.3167	-0.3295	-0.5830
3	0.4557	0.3260	0.5485	-0.1699	0.5969	0.3387	0.5797	-0.2526	-0.4639	0.5172	0.4485	0.3962	0.4567	0.3197	-0.5731
4	0.5485	-0.1699	-0.3260	0.5969	-0.4557	0.5393	0.1667	-0.5298	-0.5542	-0.3048	0.5539	0.0977	0.4321	0.5931	0.3809
5	0.5969	-0.5485	-0.4557	-0.3260	0.1699	0.7513	-0.5211	0.3467	-0.2001	-0.0837	0.6176	-0.5781	0.4443	-0.2704	0.1215
Fuerzas Equivalentes Pisos															
1	0.3563	0.3009	0.2077	0.1063	0.0289	0.0846	0.2321	0.2893	0.2617	0.1310	0.2782	0.2600	0.2334	0.1672	0.0602
2	0.6837	0.3941	0.0591	-0.0883	-0.0486	0.3076	0.5660	0.3226	-0.5041	-0.1436	0.6255	0.4159	0.1338	-0.0913	-0.0847
3	0.9557	0.2152	-0.1909	-0.0329	0.0528	0.6240	0.5872	-0.1516	-0.1874	0.1264	0.9235	0.2750	-0.1938	-0.0886	0.0832
4	1.1503	-0.1122	-0.1134	0.1157	-0.0403	0.9934	0.1689	-0.3142	0.2239	-0.0745	1.1405	-0.0678	-0.1826	0.1643	-0.0553
5	1.2517	-0.3621	0.1586	-0.0632	0.0150	1.3841	-0.5279	0.2056	-0.0808	0.0205	1.2717	-0.4013	0.1877	-0.0749	0.0176

Con estos datos se consideran tres hipótesis en relación con la rigidez de los dinteles:

1. Rigidez infinita. (Modelo viga de cortante).
2. Rigidez nula. (Modelo viga de flexión).
3. Igual a la rigidez a flexión de los soportes. (Modelo viga flexo-cortante).

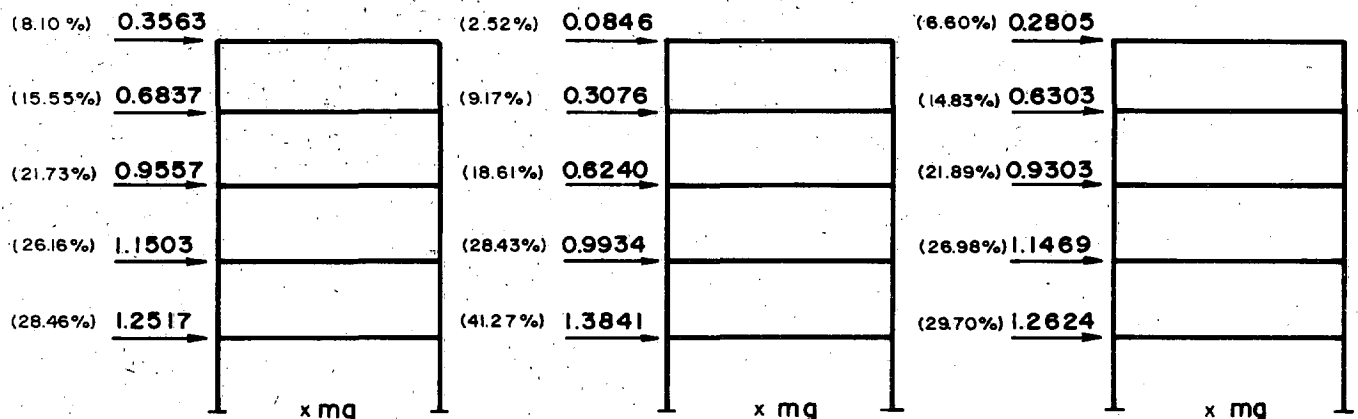
Los resultados de interés para un cálculo sísmico son (para  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ):

Frecuencias:  $\omega_n = \bar{\omega}_n \frac{k}{m}$

Modos:  $\phi_n = \{\phi_{1n}, \phi_{2n}, \phi_{3n}, \phi_{4n}, \phi_{5n}\}^T \frac{1}{m}$

Es conveniente conocer estos modos ortonormalizados, es decir, que satisfagan la condición:

$$\phi_n^T m \phi_n = 1$$



(a) Viga de cortante.

(b) Viga de flexión.

(c) Viga de flexocortante.

Figura 6.—Fuerzas equivalentes a un seísmo. Primer modo.



TABLA 2  
FRECUENCIAS

Número de Armónico	Viga de Cortante			Viga de flexión		
	Caso Real	Caso Continuo	Relación	Caso Real	Caso Continuo	Relación
1	0.2846	0.2856	0.9966	0.0338	0.0336	1.0079
2	0.8308	0.8568	0.9697	0.2160	0.2103	1.0274
3	1.3097	1.4280	0.9172	0.6122	0.5888	1.0397
4	1.6825	1.9992	0.8416	1.1828	1.1538	1.0252
5	1.9190	2.5704	0.7466	1.7606	1.9073	0.9231

su proporción de la carga total.

4.3977 mg (87,95 %), 3.3537 mg (67,07 %) y 4.2504 (85,01 %).

Normalizando las acciones representadas en la figura 6, se deducen los valores porcentuales allí indicados, y de nuevo se ratifica el hecho de que el procedimiento de la carga estática equivalente (proporción 20 por 100 de la fuerza total en cada piso) no es adecuado.

A efectos comparativos, se presentan en la tabla 2 los valores de las frecuencias obtenidas en el límite, como viga continua de flexión y cortante, para este caso.

## 6. CONCLUSIONES

Las fórmulas explícitas deducidas permiten evaluar exactamente y con un mínimo de cálculo el comportamiento ante sismos de pórticos planos regulares. Las extensiones a otras situaciones distintas a la ideal considerada puede llevarse a cabo introduciendo valores medios adecuados. Los resultados obtenidos pueden ser utilizados en fases previas de proyecto, particularmente en emplazamientos en los que son esperadas acciones sísmicas importantes.

## REFERENCIAS

1. DOWRICK, D. J.: «*Earthquake Resistant Design*». John Wiley (1977).
2. CLOUGH, R. W., and PENZIEN, J.: «*Dynamics of Structures*». Mc Graw Hill (1975).

### Avelino Samartín Quiroga



Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos (1963). Catedrático y Director del Departamento de Análisis de la Estructuras de la ETSI de Caminos, Canales y Puertos de Santander. Vocal de la Junta Directiva de la Asociación Española de Ingeniería Sísmica.

### Luis Moreno García



Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos (1971). Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos por la Universidad de Santander (1984). Profesor titular del Departamento de Análisis de las Estructuras de la ETSI de Caminos, Canales y Puertos de Santander.

