

ESTUDIO ELASTOPLASTICO DE TALUDES (*)

Por LUIS DEL CAÑIZO PERATE
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Se aplica el método de los elementos finitos mediante sucesivos incrementos de carga al estudio tensodeformacional elastoplástico de taludes de superficie plana e isorresistente. Para el cálculo se emplean las leyes incrementales tensión-deformación de un terreno elastoplástico perfecto definido por su cohesión, su rozamiento y su dilatación. La forma del talud isorresistente se altera por la existencia del vértice del pie del talud, y varía según sea el coeficiente de empuje al reposo liberado durante la excavación. La dilatación del terreno influye en la deformada del talud, pero no afecta casi a su coeficiente de seguridad.

Introducción.

La Mecánica de Suelos ha estudiado tradicionalmente sus problemas por dos procedimientos: el cálculo elástico y el método del estado límite en equilibrio plástico. Dentro del problema del talud, el aspecto principal y tal vez obsesivo para el ingeniero suele ser el de la estabilidad. El método del estado límite lo resuelve, dando un valor bastante preciso del coeficiente de seguridad de que se dispone, pero es sólo comprobatorio, suministrando una información muy pobre o nula sobre el modo de comportarse el terreno y las deformaciones que sufre, o referente a dónde sobra o falta material.

Sin embargo, al ingeniero también le interesa conocer el estado de deformación del terreno, que es un aspecto muchas veces tan importante como el anterior de la seguridad a la rotura. Dentro del problema de los taludes se presentan dos casos de interés: el de una excavación próxima a un edificio, con peligro de agrietamiento de éste por los asentamientos que en él se provocan, y el de las presas de materiales sueltos, cuya deformación interesa conocer para prevenir su posible agrietamiento, así como para controlarla y vigilarla.

El empleo de las teorías de la elasticidad permite el cálculo de las deformaciones, pero es bastante inexacto debido a la rápida apari-

ción de zonas plásticas que aumentan grandemente los corrimientos, y crean unos reajustes de tensiones que falsean la imagen del comportamiento del terreno.

Ambos problemas, el estado deformacional del suelo y su estado tensional —sea límite o no—, son en realidad dos aspectos de un mismo fenómeno, que es la forma de reaccionar del terreno ante unas fuerzas exteriores adquiriendo un estado capaz de equilibrarlas, coexistiendo zonas elásticas, regidas por un sistema de ecuaciones diferenciales elípticas, y otras plásticas, regidas por otras ecuaciones diferenciales hiperbólicas, con la dificultad de no conocerse el contorno que las separa. La única forma práctica de abordar el problema es por métodos numéricos y se ha escogido entre éstos el método de los elementos finitos, que es el que mejor permite adaptarse a cualquier contorno del talud gracias a su malla de triángulos.

Método de cálculo.

El procedimiento de cálculo numérico empleado aplica el peso propio total del terreno en incrementos sucesivos. Arranca de un terreno elástico al cual se aplica una carga tal que inicie la plastificación en un sólo punto o elemento del sólido, entonces se modifican las características tensodeformacionales de esa zona, de acuerdo con las características reológicas del suelo; se añade un nuevo incremento de carga y la zona que ya se encuentra en

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que pueden remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de noviembre de 1973.

estado de plasticidad contenida se deforma casi libremente, por lo que las áreas elásticas contiguas se sobrecargan y son arrastradas al estado plástico, teniéndose que modificar entonces las características tensodeformaiconales de estos nuevos elementos en estado plástico. El proceso incremental se continúa hasta alcanzarse la carga total, o una zona plástica tan extensa que se produce el colapso. Por lo tanto, se ha sustituido en cada punto del terreno la ley de tensión-deformación curvilínea teórica por una poligonal, correspondiendo cada segmento de la poligonal a un incremento de carga, y así se reproduce el fenómeno real tanto mejor si son menores los incrementos de carga aplicada y si la teoría plástica matemática utilizada se adapta más a los suelos de la naturaleza. Este procedimiento se conoce con el nombre de la "matriz de rigidez tangente".

Con esta forma de abordar el problema planteado se consigue la imagen más completa posible del comportamiento real del terreno, obteniéndose a la vez sus desplazamientos, la repartición de tensiones, el contorno de las zonas plastificadas y su evolución y propagación, el coeficiente de seguridad y una orientación sobre dónde falta o sobra material, proporcionando una buena ayuda para el dimensionamiento de las obras, gracias a haber ceñido el aparato matemático a la realidad del fenómeno (Jiménez Salas, 1967). Sólo el método de los campos asociados (Serrano, 1972) da una cantidad de resultados similares.

Más detalles sobre el procedimiento de cálculo empleado han sido publicados (Cañizo, 1971).

Modelo reológico del terreno.

El modelo reológico del terreno que se emplee es probablemente el tema crucial, pues en gran parte de las aplicaciones realizadas hasta la fecha existe una falta de rigor y un desconocimiento bastante general de las teorías de plasticidad por parte de sus autores, y por este motivo se ha realizado en este aspecto un mayor esfuerzo. Aquí se utiliza un modelo matemático de suelo isótropo elasto-plástico perfecto (elasticidad lineal hookiana seguida de plasticidad perfecta de deformaciones indeterminadas) con cohesión y rozamiento, que plastifica según el criterio de Mohr Coulomb

(fig. 1; a). Este criterio clásico no concuerda con los resultados experimentales (Roscoe, 1970) en lo relativo al plano de rotura y a las deformaciones plásticas volumétricas (predice un incremento relativo de volumen proporcional a $\text{sen } \phi$, mucho mayor del real), por lo cual las relaciones incrementales tensión-deformación se derivan de esta función de rotura sin cum-

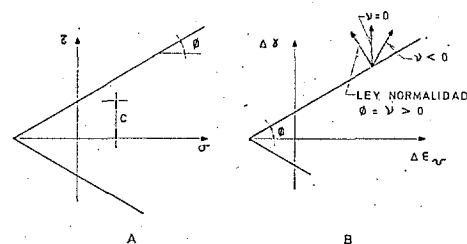


Fig. 1. — A) criterio de Mohr Coulomb; B) vectores de incremento de deformación plástica positiva, nula y negativa.

plir la ley de la normalidad (fig. 1, b), respetando en cambio una dilatación prefijada "v" característica del suelo. Se entiende por dilatación la variación relativa de volumen debida a las deformaciones plásticas:

$$\text{sen } v = \frac{\Delta \text{Vol}^p}{\Delta \text{Vol}} K$$

En tensión plana el criterio de Mohr Coulomb se define por:

$$+ \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \text{sen } \phi = c \cos \phi$$

Las relaciones incrementales tensión-deformación en plasticidad son:

$$\epsilon_x^p = \frac{\lambda}{4G} (\text{sen } v + \cos 2a)$$

$$\epsilon_y^p = \frac{\lambda}{4G} (\text{sen } v - \cos 2a)$$

$$\epsilon_{xy}^p = \frac{\lambda}{2G} \text{sen } 2a$$

siendo:

$$\cos 2a = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2J_2}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

El incremento de volumen es:

$$\frac{\Delta \text{Vol}^p}{\text{Vol}} = \varepsilon^p = \varepsilon_x^p + \varepsilon_y^p = \frac{\lambda}{2G} \text{sen } \nu$$

Para una dilatación $\text{sen } \nu = \text{sen } \phi$ se tiene el modelo clásico de terreno que cumple la ley de la normalidad.

Si el cuerpo es elastoplástico, sumando los incrementos de deformación elásticos en deformación plana se llega a:

$$2G \Delta \varepsilon_x = \Delta \sigma_x (1 - \mu) - \mu \Delta \sigma_y + \frac{\lambda}{2} (\text{sen } \nu + \cos 2a)$$

$$2G \Delta \varepsilon_y = \Delta \sigma_y (1 - \mu) - \mu \Delta \sigma_x + \frac{\lambda}{2} (\text{sen } \nu - \cos 2a)$$

$$2G \Delta \varepsilon_{xy} = 2 \Delta \tau_{xy} + \lambda \frac{\tau_{xy}}{J_2}$$

Diferenciando la función de rotura, se tiene:

$$J_2 \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} (\Delta \sigma_x - \Delta \sigma_y) + 2 \tau_{xy} \Delta \tau_{xy} = - \sqrt{J_2} \text{sen } \phi (\Delta \sigma_x + \Delta \sigma_y)$$

Eliminando el parámetro λ mediante esta última ecuación, y resolviendo el sistema en incrementos de tensiones $\Delta \sigma$ se llega a las relaciones tensión-deformación, que se expresan matricialmente del modo:

$$\begin{pmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

$$D_{11} = 1 + \frac{1}{B} \frac{\text{sen } \phi + \text{sen } \nu}{B} (\cos 2a) - A \cos^2 2a$$

$$D_{22} = 1 + \frac{1}{B} \frac{\text{sen } \phi + \text{sen } \nu}{B} (\cos 2a) - A \cos^2 2a$$

$$D_{12} = -1 + \frac{1}{B} (\cos 2a) \frac{\text{sen } \phi - \text{sen } \nu}{B} + A \cos^2 2a$$

$$D_{21} = -1 + \frac{1}{B} \frac{\text{sen } \phi - \text{sen } \nu}{B} (\cos 2a) + A \cos^2 2a$$

$$D_{33} = 1 - A \text{sen}^2 2a$$

$$D_{13} = -\text{sen } 2a \cdot \cos 2a \cdot A \frac{\text{sen } \nu \cdot \text{sen } 2a}{B}$$

$$D_{31} = -\text{sen } 2a \cdot \cos 2a \cdot A \frac{\text{sen } \phi \cdot \text{sen } 2a}{B}$$

$$D_{23} = +\text{sen } 2a \cdot \cos 2a \cdot A \frac{\text{sen } \nu \cdot \text{sen } 2a}{B}$$

$$D_{32} = +A \text{sen } 2a \cdot \cos 2a \frac{\text{sen } 2a \cdot \text{sen } \phi}{B}$$

Siendo:

$$B = 1 - 2\mu + \text{sen } \phi \cdot \text{sen } \nu$$

$$A = (1 - 2\mu) / (1 - 2\mu + \text{sen } \phi \cdot \text{sen } \nu)$$

Obsérvese que la matriz no es simétrica, por no cumplirse la ley de la normalidad, salvo en el caso particular $\text{sen } \phi = \text{sen } \nu$.

Unicidad y convergencia.

Un punto clave es el de asegurar que la solución obtenida sea la verdadera. La unicidad de la solución está demostrada para la elasticidad, y también para plasticidad y elastoplasticidad, cuando la matriz de las relaciones tensión-deformación sea definida positiva (Leo Finzi, 1963). Puede comprobarse que la matriz anterior lo es siempre que se cumpla:

$$\text{sen } \phi \cdot \text{sen } \nu \geq 0$$

Esta expresión tiene cierto interés, puesto que constituye la justificación matemática y energética del hecho experimental conocido de que una arcilla preconsolidada o una arena densa, al romper y sobrepasar su resistencia de pico para alcanzar una resistencia residual, pasan de tener una fuerte dilatación positiva a

tener una dilatación nula y una densidad crítica, pero no pueden alcanzar una dilatación negativa (figs. 1 y 2). La dilatación negativa sí se podrá presentar, en cambio, para arenas flojas y arcillas normalmente consolidadas, cuya rotura está regida por el modelo de la "Grant Gravel" o la "Cam-Clay", pero no por el criterio de Mohr Coulomb.

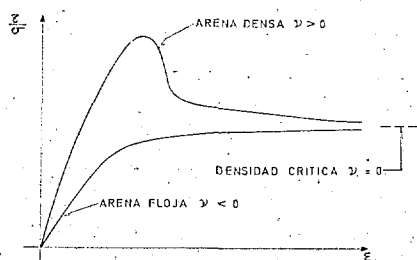


Fig. 2. — Relación experimental entre la densidad, resistencia al corte y dilatación.

Hay otro factor que influye en la unicidad de la solución, y es la historia del cuerpo. Para obtener la solución verdadera de un problema debe reproducirse fielmente su historia tensional (Hill, 1950) y, por ende, el orden de aplicación de las cargas a que esté sometido. Por ello, para el cálculo se ha utilizado, según se indicó, el método incremental de la matriz de rigidez tangente, que es el único que permite confiar en la obtención de la solución verdadera, pues descompone el cálculo en varios elásticos ficticios sucesivos a fin de reproducir el problema físico real y la historia tensional sufrida.

La convergencia de la solución obtenida por el método de los elementos finitos está estudiada rigurosamente (Arantes, 1968) y se cumple por tratarse de un caso particular del método de Ritz, cuando se aplica una sucesión de mallas de elementos conformes (con continuidad de corrimientos) y formando una secuencia completa (cada malla debe incluir todos los nodos y grados de libertad de la anterior). Con ello se garantiza la convergencia dentro de cada escalón de carga, pero para el problema elastoplástico total se obtendrá la convergencia hacia la solución teórica al tender a cero la magnitud de cada incremento de carga, además del tamaño de los elementos.

En los problemas estudiados a continuación se ha asegurado una precisión aceptable a base

de repetir los cálculos con mallas distintas, afinando especialmente los elementos en las proximidades del vértice cóncavo del talud (por ser éste un punto singular en su proximidad habrá grandes gradientes de tensiones), y alejando suficientemente las paredes del contorno (fig. 6).

Problemas estudiados.

La mayoría de los trabajos sobre taludes de otros autores se han realizado en elasticidad, lineal o no lineal, pero pocos emplean las teorías plásticas con rigor. Son de destacar los trabajos de Lorente de No (1966) para un talud vertical en terreno coherente. Los de Watt (1968) sobre un talud de forma irregular, también en terreno coherente. Los de Duncan y Dunlop (1970) para taludes planos que, aunque empleando unas leyes tensión-deformación bilineales semiempíricas en terreno puramente coherente, tienen interés por estudiar un talud excavado por fases en arcillas preconsolidadas o en arcillas normalmente consolidadas, considerando diferentes valores del empuje al reposo y de variación de la cohesión con la profundidad. Y los de Clough y Woodward (1967) sobre una presa de materiales sueltos construida por tongadas, con un modelo de terreno semiempírico según la ley tensión-deformación hiperbólica de Kodner.

Los casos aquí estudiados presentan sobre los anteriores la ventaja del modelo reológico antedicho, teóricamente más riguroso, y que reproduce un terreno definido por tres parámetros, la cohesión c , el rozamiento ϕ y la dilatación ν , siendo la primera vez que se aplica este modelo de terreno.

Talud plano coulombiano.

Se ha estudiado el caso de un talud plano de 75° de pendiente y de 10 m de altura, en un terreno de material elastoplástico perfecto de ángulo de rozamiento igual al de dilatación de 20° y cohesión 3 Tm/m^2 .

Primeramente se aplica una densidad a todo el terreno tal que comience a plastificar la pareja de elementos triangulares más próxima al vértice del talud, y a continuación se aumenta dicha densidad en sucesivos incrementos de

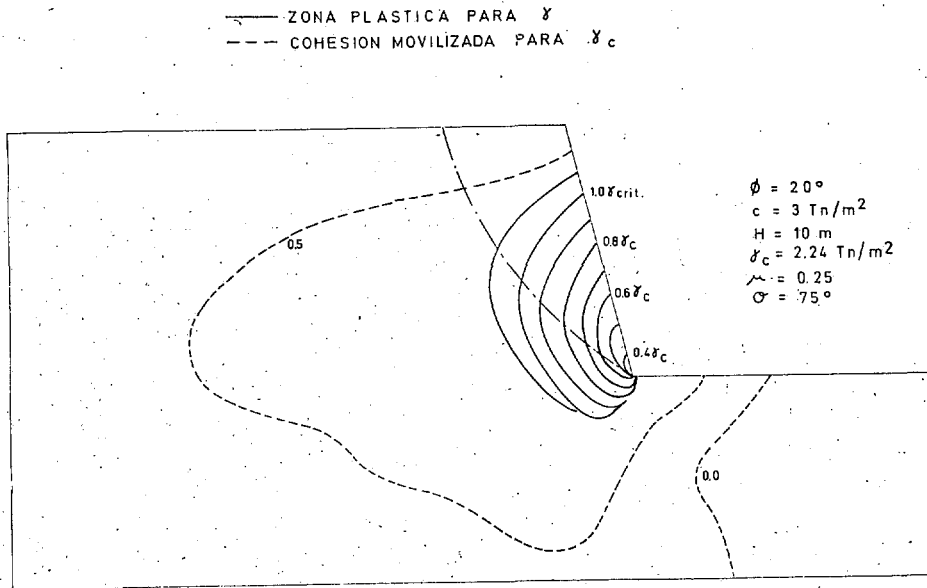


Fig. 3. — Plastificación progresiva de un talud plano.

un 10 por 100, obteniéndose en la figura 3 el crecimiento de la zona plastificada.

Los resultados obtenidos indican que se inicia la plastificación con una densidad del 40 por 100 de la necesaria para que se produzca el círculo de deslizamiento según el ábaco de Taylor, valor que debe ser bastante exacto,

ya que el punto donde se calcula la tensión dista del vértice del talud sólo un 3 por 100 de la altura. La zona plastificada está muy próxima a la pared del talud, lo cual concuerda con el círculo pésimo de deslizamiento, si bien no ha alcanzado la coronación con la densidad teórica.

En la zona aún en estado elástico tiende a

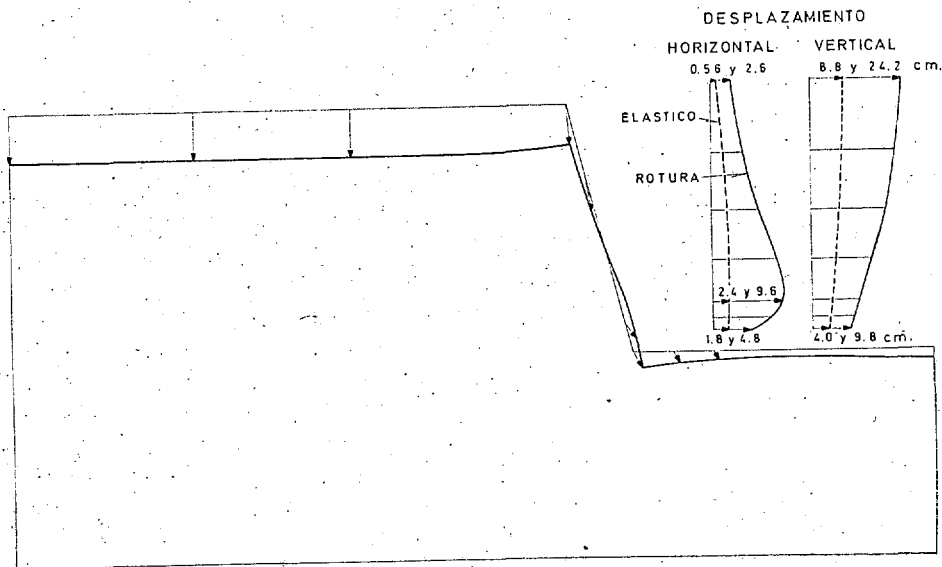


Fig. 4. — Deformada del talud plano.

crecer la plastificación horizontalmente, hacia el interior del terreno, lo cual ocurre a causa del bajo valor considerado para el empuje al reposo $K_0 = 0,33$.

En la figura 4 puede verse la deformada del talud, con la clásica forma de panza debida a la plastificación prematura del pie y de las zonas bajas del mismo.

Talud ortolisténico.

Partiendo de la ecuación diferencial de la curva de deslizamiento, deducida por Resal en la hipótesis de Rankine de los diámetros conjugados de la elipse de tensiones, Frontard obtuvo como línea de deslizamiento para un talud plano una curva cicloidal, una logoide y una parábola semicúbica, según la pendiente del talud sea mayor, menor o igual al ángulo de rozamiento interno. Más tarde, Frontard (1948) invirtió los términos del problema, buscando como incógnita la forma del talud tal que su línea de deslizamiento sea conocida y resolvió el caso de línea de deslizamiento recta —talud ortolisténico—, o simétrica especular del propio contorno exterior del terreno —talud isolisténico—. Ambas formas tienen el interés teórico de permitir a un terreno alcanzar por encima de la línea de inclinación " ϕ " una altura infinitamente grande, manteniendo siempre una pendiente mayor de ϕ , si bien para ello es preciso alejarse un infinito de orden superior del pie del talud, pues es conocido que la influencia de la cohesión tiende a ser nula al crecer la altura.

Frontard señaló la posibilidad de obtener una economía al excavar taludes tallándoles las citadas formas, por los mayores desniveles que se pueden salvar en comparación con un talud plano, y por requerir un menor volumen de material arrancado al tener formas convexas.

Tras dibujar superpuestos los taludes ortolisténicos, plano e isorresistente para distintas alturas y distintos valores de ϕ , se llega a las siguientes conclusiones (fig. 5):

Al construir un talud la forma más económica es la isorresistente, como ya se intuía, aumentando su ventaja al crecer la altura y el ángulo de rozamiento. Al excavar un talud para alturas pequeñas las formas que requiere arrancar menos material son la plana y la isorresistente. Los ortolisténicos para superficies desli-

zantes de pie son más económicos sólo al excavar alturas medias en terrenos de arcilla saturada, cuando la estabilidad venga determinada a corto plazo ($\phi = 0$). Las pendientes obtenidas son tan suaves en estos casos, que tienen poco interés en la práctica, y el valor de los taludes ortolisténicos es más bien teórico, en contra de lo afirmado por Frontard.

— TALUD ORTOLISTENICO MAXIMO
 - - - LUGAR DE LOS VERTICES DE TALUDES PLANOS
 - - - LUGAR DE LOS VERTICES DE TALUDES ISORRESISTENTE
 TALUD ISOLISTENICO $\omega = \phi = 0^\circ$

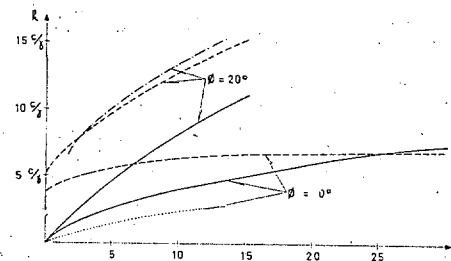


Fig. 5. — Comparación entre taludes ortolisténicos, planos e isorresistentes para alturas pequeñas.

Talud isorresistente.

Talud isorresistente es aquel que plastifica todo él simultáneamente, por lo tanto el coeficiente de seguridad a la rotura de cada partícula es el mismo, aprovechándose al máximo el material. A muchas presas de materiales sueltos se les da un perfil poligonal cóncavo, acercándolas intuitivamente al perfil isorresistente y obteniendo así un ahorro de material, pero, sin embargo, hasta ahora en contadas ocasiones se ha aprovechado directamente esta forma teórica para comprobar o aproximar a ella la sección real de la presa (Uriel, 1967). El motivo de ello es en parte que la bondad del perfil teórico es dudosa, debido a que las hipótesis de partida para obtenerlo son un tanto groseras por considerar un material plástico rígido con deformaciones elásticas nulas y deformaciones plásticas indeterminadas, sin tener en cuenta la compatibilidad de deformaciones y olvidando la influencia de las tensiones previas a la excavación, o de factores exteriores a la masa deslizante pero próximos a ella, como puede ser el punto singular del pie del talud.

Para comprobar el orden de magnitud de la

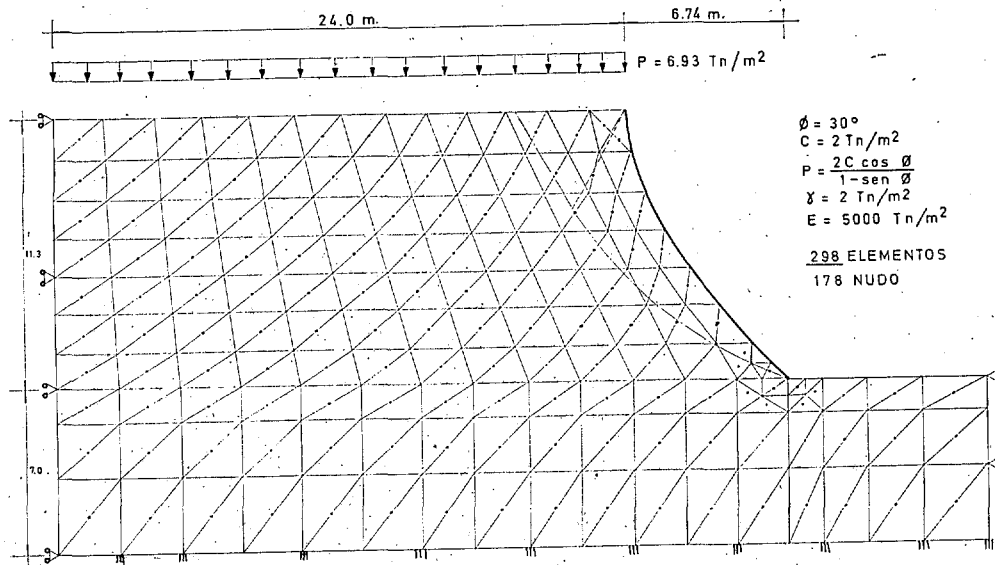


Fig. 6. — Malla de elementos finitos para el talud isorresistente.

influencia de algunos de estos factores se ha calculado por el método de los elementos finitos el talud isorresistente que Sokolowsky (1960) pone por ejemplo en su libro, con ángulo de rozamiento interno de 30° , cohesión 2 Tn/m^2 y sobrecarga uniforme en coronación $2 c \cos \phi /$

$(1 - \sin \phi)$. La densidad teórica de rotura total repentina es $\gamma = 2 \text{ Tn/m}^3$. El terreno se ha supuesto elastoplástico perfecto, y se ha tenido en cuenta la compatibilidad de deformaciones.

La figura 6 muestra una de las mallas de elementos finitos usada.

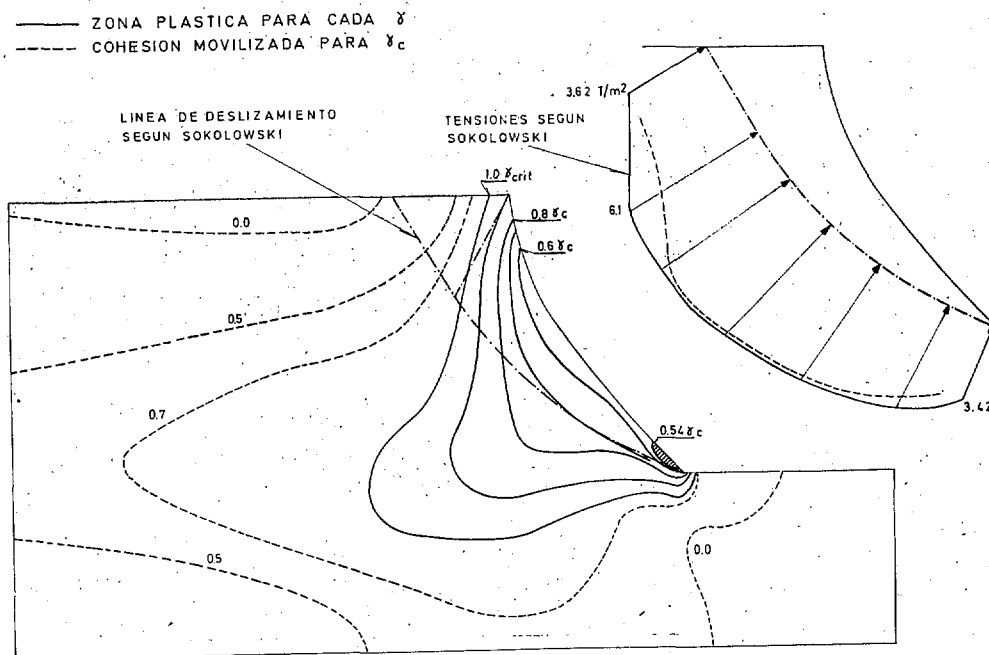


Fig. 7. — Plastificación progresiva de un talud isorresistente. $K_0 = 0,333$. $\mu = 0,25$.

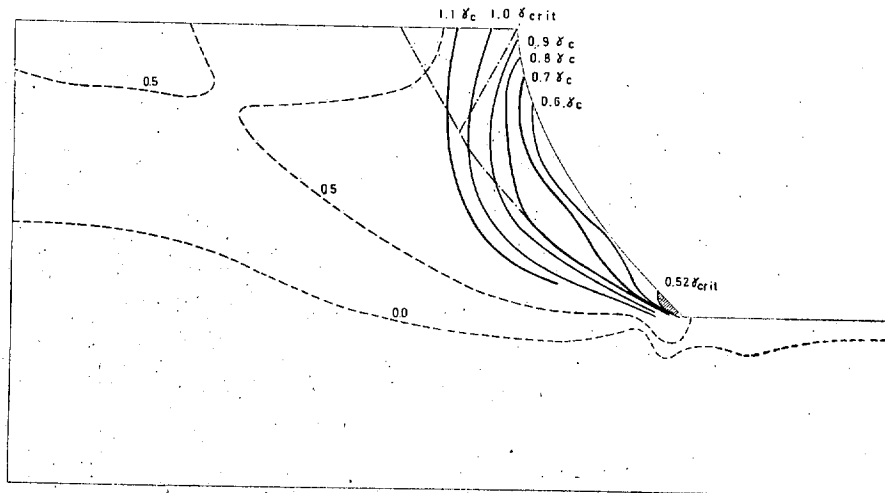


Fig. 8. — Plastificación progresiva de un talud isorresistente. $\mu = 0,333$. $K_0 = 0,50$.

Se han repetido los cálculos para el mismo talud con dos coeficientes de Poisson distintos, de valores 0,25 y 0,333, lo que equivale a coeficientes de empuje al reposo de $K_0 = 1/3$ y $K_0 = 1/2$, respectivamente, y puede verse que la influencia de estos factores en las zonas plastificadas y su crecimiento es grande (figs. 7 y 8). Para coeficientes de Poisson análogos a los de los suelos reales ($\mu = 0,333$) la forma de la ro-

tura se asemeja bastante a la teórica, con cierta discrepancia en la parte alta, que es donde la malla de elementos finitos puede tener más error. En cambio, para valores de empuje al reposo muy bajos, y es de suponer que también para los muy altos (arcillas preconsolidadas), esta forma del talud pierde su carácter de isorresistencia.

Como era de esperar, la influencia del vér-

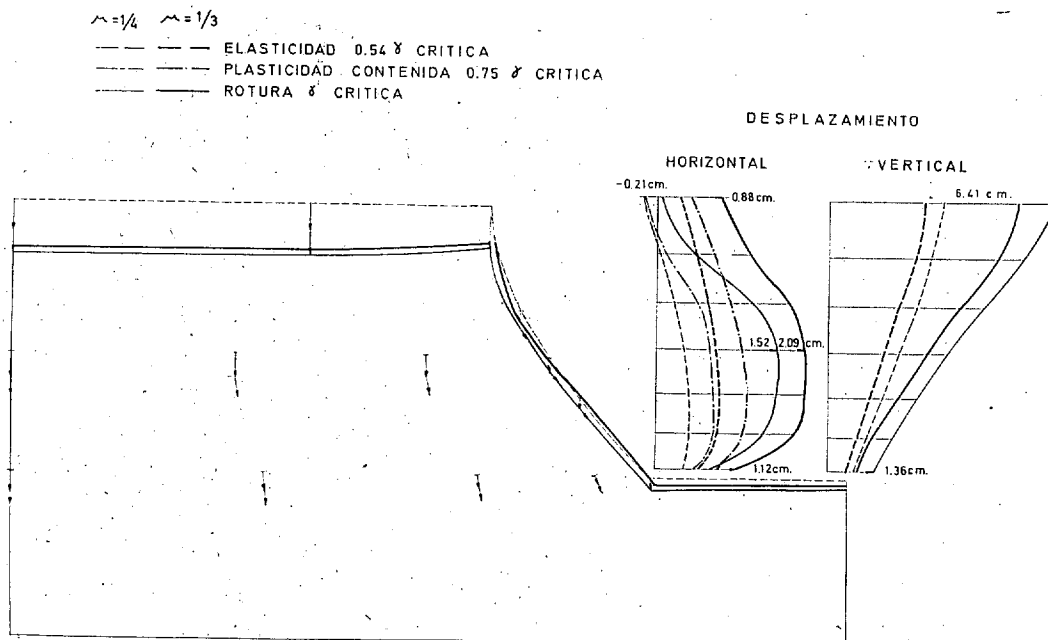


Fig. 9. — Deformada de un talud isorresistente.

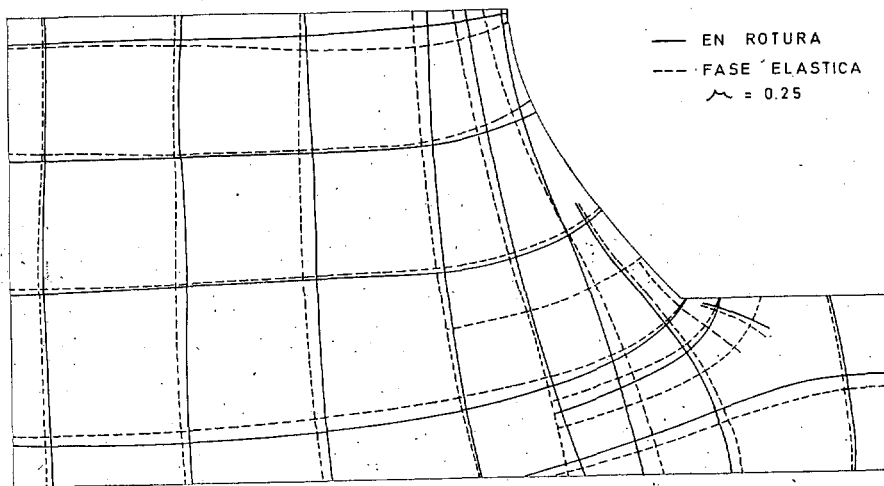


Fig. 10. — Isostáticas en un talud isorresistente.

tice del pie del talud es muy grande, ya que crea una concentración de tensiones tal que anticipa la iniciación de la plastificación a un valor del 54 por 100 de la densidad teórica. No obstante, la zona plastificada crece muy rápidamente hacia arriba, manteniéndose muy pegada al frente del talud, confirmando cierto carácter de isorresistencia de éste.

De lo anterior se puede deducir que para empujes al reposo normales la forma teórica de talud isorresistente es bastante correcta, siendo necesario modificarla aumentando más su pendiente en coronación y, sobre todo, sustituyendo el punto singular del pie, que es el causante de que se inicie prematuramente la rotura, por una superficie suave de transición entre el talud y la línea horizontal.

Las deformaciones, que como se sabe no podrían calcularse por el método de las características, se han representado en la figura 9. La obtención de las deformaciones es importante desde el punto de vista práctico para la vigilancia y control de presas o taludes en general, y es aún más necesario para el talud isorresistente, que por definición tiene una rotura repentina sin apenas avisar.

La deformada de la superficie del talud sigue una forma similar a la clásica de los taludes planos: asiento menor en el vértice de coronación que detrás de él, disminución del ángulo cóncavo del pie del talud y forma de panza del frente con mayores corrimientos horizontales en los dos tercios inferiores. En el caso de coe-

ficiente de Poisson menor, lógicamente los asientos verticales son mayores y, por liberarse menores tensiones horizontales (menor K_0), son menores los corrimientos horizontales.

Talud en terreno con dilatación nula.

Se ha repetido el cálculo del mismo talud isorresistente anterior en el caso en que la dilatación sea nula $\nu = 0$ en vez de ser $\nu = \phi = 30^\circ$.

Lógicamente los resultados (fig. 11) se mantienen idénticos en la fase elástica, ya que el criterio de rotura es en ambos casos el de Mohr Coulomb, y comienzan a apreciarse diferencias sólo para densidades mayores al 80 por 100 de la crítica, creciendo las desigualdades a medida que progresa la rotura, pues lo que se ha cambiado han sido las relaciones tensión-deformación elastoplásticas.

La dilatación no influye prácticamente en la rotura del talud. El único efecto es una ligera disminución de las tensiones horizontales (del 1 al 10 por 100 en las proximidades de la línea de deslizamiento para la carga de rotura), lo que se justifica porque, al no existir un incremento de volumen, el interior del terreno está menos constreñido y, como consecuencia de lo anterior, el crecimiento de la zona plastificada es algo más rápido.

En las deformaciones la influencia es mayor, como era de esperar, pues cuando la dilatación es nula en vez de positiva, los asientos son ma-

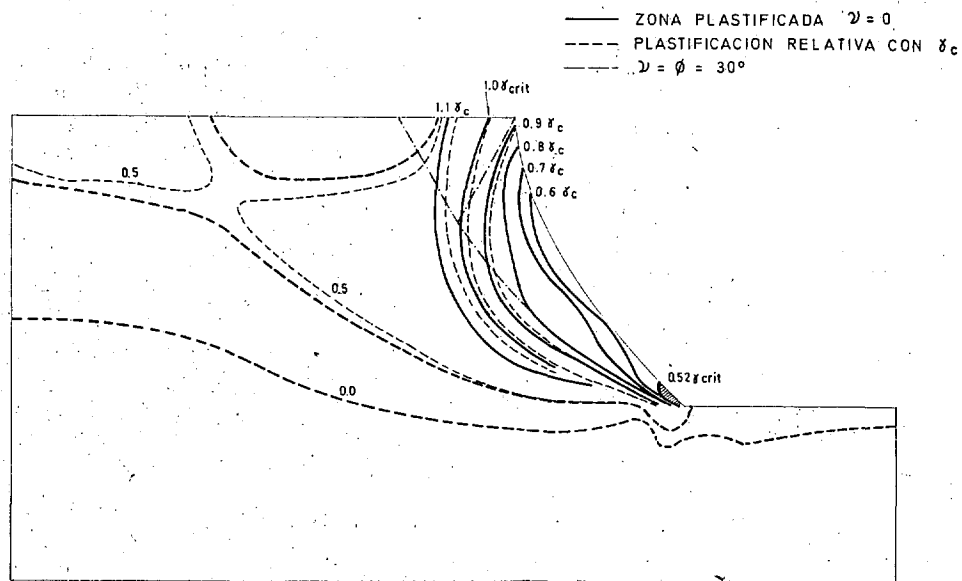


Fig. 11. — Plastificación progresiva de un talud isorresistente con dilatación nula.
 $\mu = 0,333$. $K_0 = 0,50$. $\nu = 0^\circ$. $\phi = 30^\circ$.

yores (del orden del 1 por 100 en coronación, alcanzando el 5,1 por 100 a media altura del talud) y los corrimientos horizontales menores (el 2 por 100 en el pie del talud, el 4,5 por 100 en coronación y llegan al 13,2 por 100 menores a media altura) (fig. 12). Se ha confirmado rigu-

rosamente, por lo tanto, la idea intuitiva de que la dilatación no influye apenas en aquellos problemas en que las condiciones de contorno vienen impuestas por tensiones (peso propio del terreno en este caso), y sólo afecta de un modo apreciable a los corrimientos. Por el contrario,

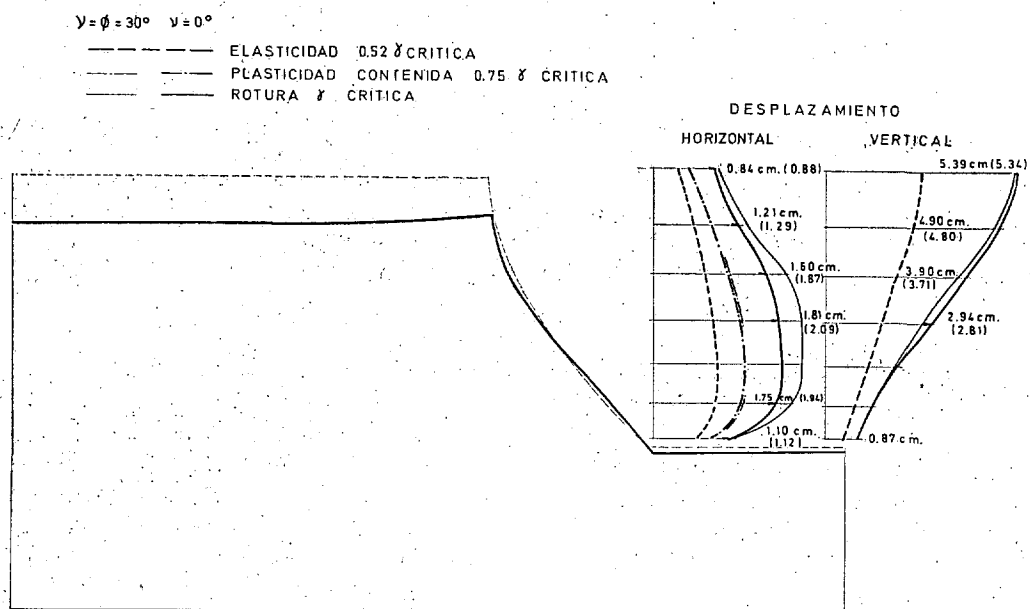


Fig. 12. — Deformada de un talud isorresistente con dilatación nula.

la influencia de la dilatación en aquellos problemas en que las condiciones de contorno vengán impuestas en corrimientos (muro, pilote, zapata rígida) es de esperar que será decisiva y, por lo tanto, el modelo de terreno de dilatación prefijada constante, cuyas leyes tensión-deformación se han deducido aquí, presenta una mayor confiabilidad para tratar estos problemas. Se continúa trabajando dentro de este campo en el estudio de un muro rígido sometido a empuje activo (Cañizo y Sagasetta, 1972).

Notación.

- c = cohesión.
- E = módulo de Young.
- G = módulo de deformación tangencial.
- J_2 = segundo invariante de tensiones.
- μ = módulo de Poisson.
- ϕ = ángulo de rozamiento interno.
- ϵ = deformación axial.
- ϵ_{xy} = deformación angular.
- γ = densidad.
- σ = tensión normal.
- τ = tensión tangencial.
- ν = ángulo de dilatación.

REFERENCIAS

ARANTES OLIVEIRA, E. R. DE: "Theoretical foundations of the finite element method". Intern. Journ. Solids and Structures, vol. 4, núm. 10, págs. 929-952, oct. 1968.

CAÑIZO, L.: "Plastificación progresiva de un talud coulombiano". Tesis doctoral, Univ. Madrid, mayo 1971.

CAÑIZO, L. y SAGASETA, C.: "Empuje de un terreno elastoplástico sobre un muro rígido móvil", V Congr. Euro-

peo Mec. Suelos y Cimentac., págs. 125-133, Madrid, 1972.

- CLOUGH, R. W. y WOODWARD, R. J.: "Analysis of embankment stresses and deformations". Proc. A.S.C.E., Journ. Soil Mech. Found. Div., SM-4, págs. 529-549, julio 1967.
- DUNLOP, P. y DUNCAN, J. M.: "Development of failure around excavated slopes". Proc. A.S.C.E., Journ. Soil Mech. Found. Div., SM-2, págs. 471-493, marzo 1970.
- FINCI, L.: "On the uniqueness of solution in statics continua with general differential stress-strain relations", capítulo IV del libro "Second Order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics", de M. Reiner y D. Abir, páginas 715-728, Jerusalén, 1964.
- FRONTARD, J.: "Surfaces de glissement et calculs de stabilité des massifs en terre à profil curviligne". Travaux, páginas 301-312, julio 1948.
- HILL, R.: "The mathematical theory of plasticity". Oxford, Clarendon Press, pág. 238, 1950.
- JIMENEZ SALAS, J. A. y SERRANO GONZALEZ, A.: "Nuevas perspectivas en el cálculo de presas de materiales sueltos". Revista de Obras Públicas, págs. 795-812, agosto 1967.
- LORENTE DE NO CABEZAS, C.: "Plastic flow behind a vertical excavation". Tesis Master, Mass. Ins. Tech, junio 1966.
- ROSCOE, K. H.: "The influence of strains in soil mechanics". Rankine lecture X, Géotechnique, págs. 129-170, febrero 1970.
- SERRANO, A.: "El método de los campos asociados y su aplicación a los problemas de empuje de tierras". V Congr. Europ. Mecánica Suelos, págs. 77-84, Madrid, 1972.
- SOKOLOWSKY, V. V.: "Statics of soil media", Londres, 1960.
- URIEL ROMERO, S.: "Cálculo de taludes isorresistentes por el método de las características y su aplicación al proyecto de presas de materiales sueltos". Revista de Obras Públicas, págs. 845-858, agosto 1967.
- WATT, B. J. y CHRISTIAN, J. T.: "Prediction of the deformation of a levee on a soft foundation". Research-Report R 69-18 Soils Publication 233, M.I.T., diciembre 1968.