

REPARTO DE TENSIONES ALREDEDOR DE UN PUNTO EN ELASTICIDAD PLANA

Por JESUS FIERRO BARDAJI
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Se estudia una construcción gráfica que permite estudiar las tensiones alrededor de un punto, en un estado plano de tensión, partiendo de las ecuaciones generales de la elasticidad plana. El método se aplica a varios problemas prácticos, detallándose en cada caso su utilización mediante esquemas sencillos.

1. Introducción.

El estado de tensión de un sólido sometido a un sistema de cargas y sujeto a un sistema de coacciones tiene solución única y a cada punto del sólido corresponde un elipsoide de tensiones, representación intrínseca de las condiciones elásticas del sólido en dicho punto.

Sin embargo, ordinariamente, la obtención de dicho elipsoide de tensiones es un paso posterior a la determinación de una solución que proporciona las tensiones en las caras de un paralelepípedo elemental cuyas aristas son paralelas a los ejes de un sistema coordenado cuya orientación respecto al sólido se fija convencionalmente.

Esta solución da unas funciones $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$, variables con las coordenadas (x, y, z) de los puntos del sólido (*). En el caso particular de la elasticidad plana las tensiones a determinar son solamente tres, a saber: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. En este caso tiene particular interés la determinación de las tensiones principales y, a partir de ellas, de la red de isostáticas, de cuyo examen se pueden deducir las condiciones resistentes del sólido en los diversos puntos y calcular, en definitiva, el grado de seguridad alcanzado.

Poderoso auxiliar de este proceso es la construcción gráfica de Mohr, que determina sencillamente la dirección y magnitud de dichas tensiones principales.

El objeto de este artículo es justificar y estudiar otra construcción gráfica que permite encontrar, sobre un plano de orientación α cualquiera, las tensiones normal σ_α y tangencial τ_α , en función de las tensiones σ_x, σ_y y τ_{xy} en planos paralelos a los coordenados.

Basados en la construcción gráfica descrita, se enuncian y demuestran algunas propiedades de los estados elásticos bidimensionales y se realiza un ejemplo concreto.

2. Convenio de signos y notación.

Seguiremos la notación y convenio de signos descritos a continuación (**). Para elementos diferenciales *rectangulares* como el de la figura 2.1 se define:

σ_x, σ_y y τ_{xy} son positivas cuando sobre el lado de mayor abscisa (u ordenada) tienen el sentido positivo de los ejes.

(*) En los estados de equilibrio dinámico puede darse una nueva variable: el instante t considerado. Pero también en estos estudios, para cada instante t determinado, las tensiones son funciones de las coordenadas citadas.

(**) E. Torroja, *Elasticidad*. Ed. Dossat, Madrid, 1951.

Los ángulos son positivos cuando se miden en el sentido que lleva del semieje (+ x) al semieje (+ y) por el camino más corto.

Para elementos diferenciales *triangulares*, como el de la figura 2.2, se define: σ_x , σ_y y τ_{xy} son positivas cuando lo sean en el elemento rectangular del que el elemento triangular es mitad (de puntos en la figura 2.2.).

σ_a es positiva cuando va en el sentido de la seminormal exterior a la hipotenusa del elemento triangular.

τ_a es positiva cuando su momento respecto al vértice opuesto a la hipotenusa del elemento triangular gira en el sentido positivo de los ángulos.

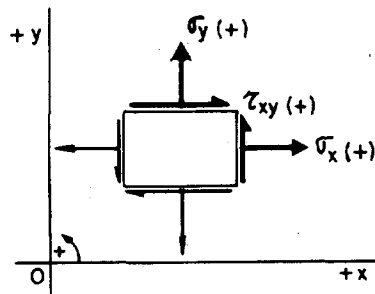


Figura 2.1.

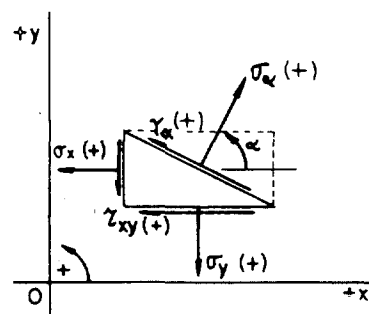


Figura 2.2.

3. Equilibrio del elemento triangular.

El elemento triangular queda definido por el ángulo α de la seminormal a la hipotenusa, que no corta al triángulo con el semieje (+ x).

Los lados tienen por longitudes $d's$, $d'x$, $d'y$, siendo (fig. 3.1):

$$d'x = d's \operatorname{sen} \alpha; \quad d'y = d's \operatorname{cos} \alpha.$$

Del equilibrio del elemento de la figura 2.2 se deduce:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a d's &= \sigma_x d'y \operatorname{cos} \alpha + \sigma_y d'x \operatorname{sen} \alpha + \tau_{xy} d'y \operatorname{sen} \alpha + \tau_{xy} d'x \operatorname{cos} \alpha \\ \tau_a d's &= -\sigma_x d'y \operatorname{sen} \alpha + \sigma_y d'x \operatorname{cos} \alpha + \tau_{xy} d'y \operatorname{cos} \alpha - \tau_{xy} d'x \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ec. 3.2})$$

Sustituyendo los valores dados por las Ec. 3.1 en las ecuaciones 3.2 y simplificando se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \sigma_x \operatorname{cos}^2 \alpha + \sigma_y \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha \\ \tau_a &= -(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha + \tau_{xy} (\operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha), \end{aligned}$$

que por sencillas transformaciones trigonométricas devienen:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{cos} 2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha; \quad (\text{Ec. 3.3})$$

$$\tau_a = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{cos} 2\alpha. \quad (\text{Ec. 3.4})$$

Puede observarse que, haciendo $\alpha = 0$ en (3.4), se obtiene $\tau_a = \tau_{xy}$ y haciendo $\alpha = 90^\circ$ se obtiene $\tau_a = -\tau_{xy}$. Hay que tener en cuenta esta circunstancia al

calcular, porque el convenio de signos utilizado para τ_a no es acorde con el utilizado para τ_{xy} debido a que en el equilibrio del elemento rectangular se da el signo de τ_{xy} a las cuatro tensiones tangenciales que actúan en las caras. Esta falta de concordancia en los signos no es importante, porque siempre se sabe con qué convenio se está operando, pero conviene dejarla apuntada aquí.

Una forma de soslayar el problema es considerar como signos positivos de las tensiones cortantes los de la figura 3.2, siendo entonces $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$.

Esta modificación deja inalteradas las ecuaciones de la elasticidad, pero ya no se pueden permutar los subíndices de las tensiones cortantes, debiendo distinguirse entre τ_{xy} y τ_{yx} .

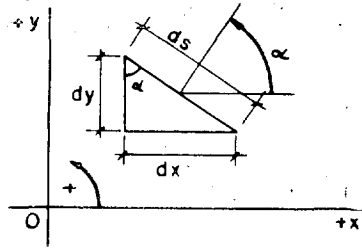


Figura 3.1.

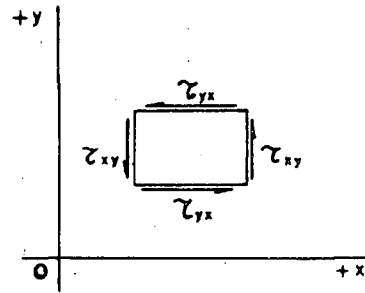


Figura 3.2.

4. Construcción gráfica.

Basados en las fórmulas (3.3) y (3.4) vamos a demostrar la construcción gráfica que da σ_a y τ_a en función de σ_x , σ_y y τ_{xy} .

Orientemos un sistema coordenado (σ, τ) con los ejes paralelos a los (x, y) , respectivamente, y los mismos sentidos positivos. A una cierta escala, las tensiones vendrán representadas en este sistema por longitudes (fig. 4.1.).

Sobre el eje $O\sigma$ llevamos $OM = \sigma_x$, $ON = \sigma_y$, y dibujamos el punto medio A del segmento MN.

Se tiene, evidentemente,

$$OA = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}.$$

Trazamos la circunferencia θ_1 de centro A que pasa por O.

Representamos el punto P de coordenadas (σ_x, τ_{xy}) .

Trazamos la circunferencia θ_2 de diámetro AP que pasa por M por ser recto

el ángulo \widehat{AMP} .

Para conocer las tensiones sobre un plano definido por el ángulo α de su normal con el semieje $+x$ se procede como sigue:

1.º Se traza por O la semirrecta OQ que forma con el semieje $+x$ el ángulo α . Esta semirrecta, o su opuesta, cortan a θ_1 en un punto distinto del O al que llamamos K.

2.º Se traza la semirrecta AK que determina el punto B sobre θ_2 y se dibuja el punto C simétrico de K respecto de A.

Vamos a demostrar que $CB = \sigma_a$ y que $BP = \tau_a$.

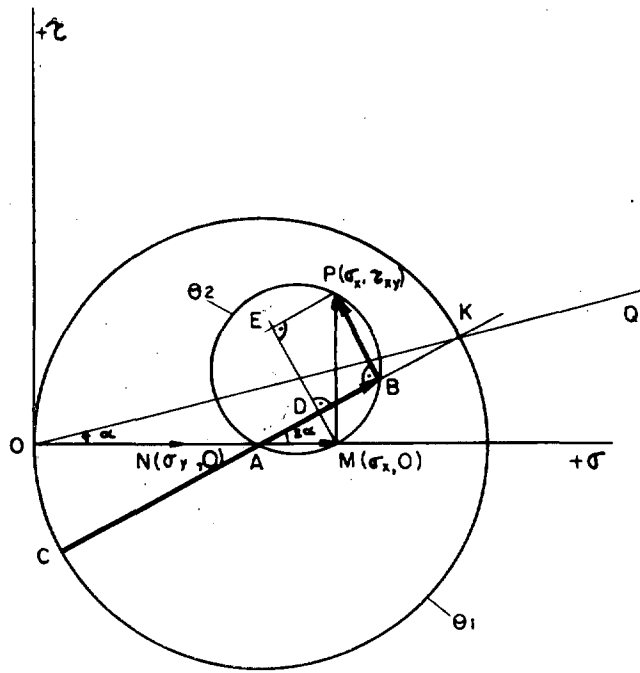


Figura 4.1.

Demostración: $CB = CA + AB$.

$$CA = OA = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \text{ por construcción.}$$

$$AB = AD + DB = AD + EP = AM \cos 2\alpha + MP \operatorname{sen} 2\alpha.$$

Como

$$AM = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}, \text{ y } MP = \tau_{xy},$$

se tiene:

$$CB = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha = \sigma_a \text{ según (3.3).}$$

Por otra parte:

$$BP = DE = ME - MD = -MD + ME.$$

$$MD = AM \operatorname{sen} 2\alpha; \text{ y } ME = MP \operatorname{cós} 2\alpha.$$

Luego

$$BP = -AM \operatorname{sen} 2\alpha + MP \operatorname{cós} 2\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{cós} 2\alpha = \tau_a,$$

según la fórmula (3.4).

Respecto al signo de las tensiones se puede observar que la construcción se

ha hecho para el caso en que todas son positivas, como se deduce tanto del examen de la figura 4.1 como de las fórmulas (3.3) y (3.4). Los sentidos reales de las tensiones son los que tienen los vectores \vec{CB} y \vec{BP} después de haber girado ambos un ángulo $-\alpha$ para que CB tenga la orientación de la normal exterior a la hipotenusa del elemento triangular considerado.

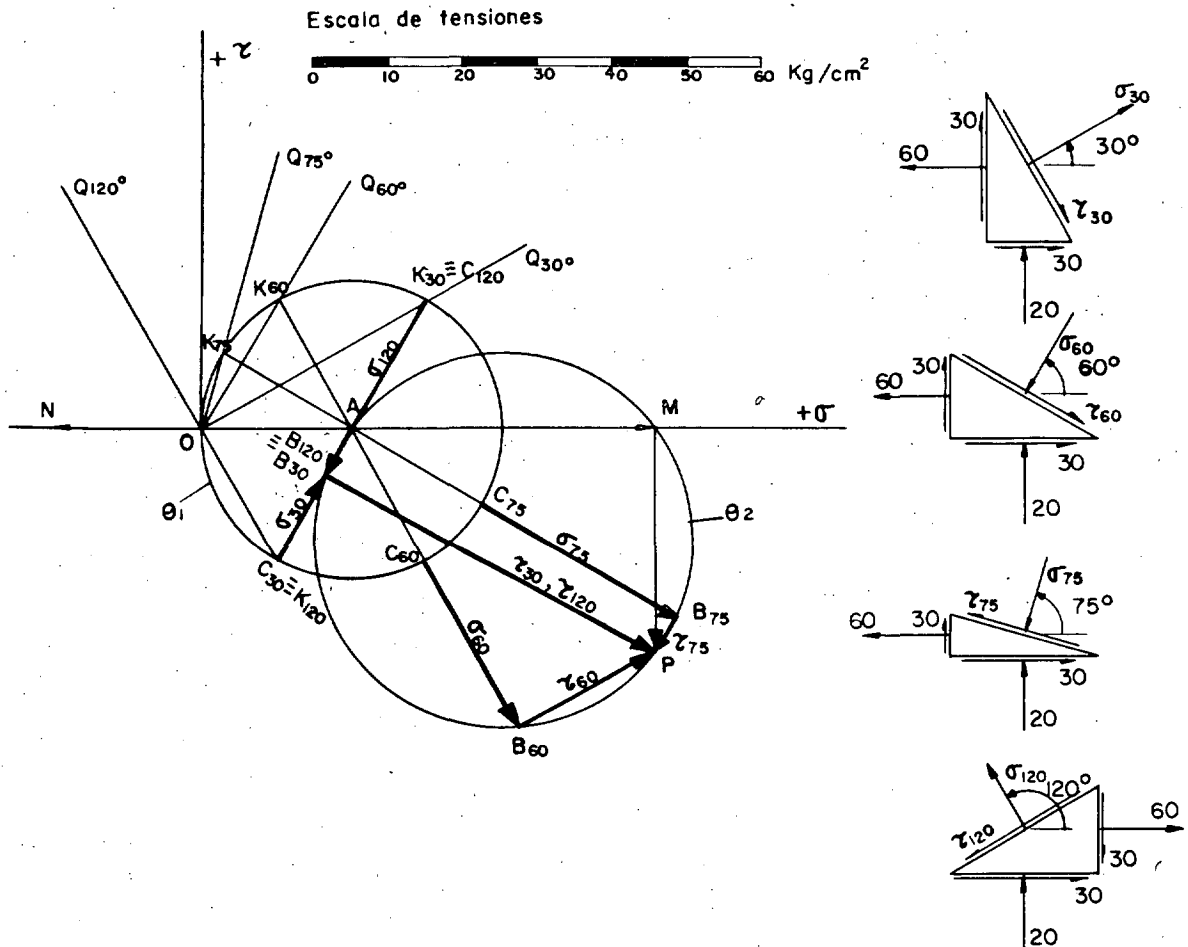
5. Ejemplo de aplicación práctica.

Se realiza a continuación un ejemplo determinando las tensiones σ_a y τ_a para varias orientaciones α_i y se dibujan los diagramas de tensiones en los respectivos elementos triangulares.

Datos:

$$\sigma_x = 60 \text{ Kg./cm.}^2; \quad \sigma_y = -20 \text{ Kg./cm.}^2; \quad \tau_{xy} = -30 \text{ Kg./cm.}^2.$$

Se desea conocer σ_a y τ_a para $\alpha = 30^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ y 120° .



6. Obtención de las tensiones principales.

Son las que actúan en los planos en los que la tensión tangencial es nula. Esto se da cuando el punto B coincide con P, lo que proporciona dos posiciones posibles del punto C (fig. 6.1) correspondientes a puntos diametralmente opuestos sobre θ_1 .

Por tanto:

$$2\alpha_{II} = 2\alpha_I + 180^\circ,$$

y en consecuencia:

$$\alpha_{II} = \alpha_I + 90^\circ,$$

lo que nos demuestra la perpendicularidad de las tensiones principales.

Al elemento diferencial de la figura 6.2 corresponde, mediante la construcción gráfica de la figura 6.1, el elemento diferencial de la figura 6.3 orientado según las direcciones principales.

En la misma figura 6.1 se ve inmediatamente la conocida identidad:

$$\sigma_I + \sigma_{II} = \sigma_x + \sigma_y,$$

y también que las tensiones principales son una el máximo y otra el mínimo de σ_α .

De la misma figura se deduce la propiedad

$$\operatorname{tg} 2\alpha_I = \operatorname{tg} 2\alpha_{II} = \frac{MP}{AM} = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y},$$

utilizada frecuentemente en los cálculos numéricos.

Finalmente se deducen, de la figura 6.1, los valores de las tensiones principales.

$$\sigma_I = C_1P = C_1A + AP = OA + AP = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

$$\sigma_{II} = C_2P = C_2A - AP = OA - AP = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

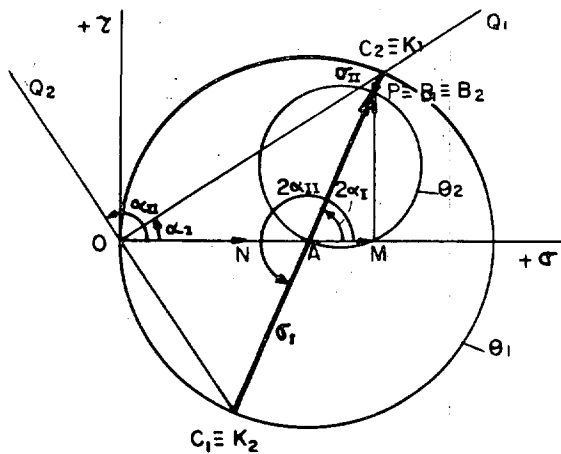


Figura 6.1.

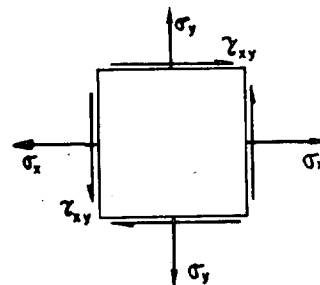


Figura 6.2.

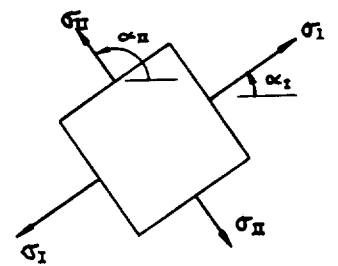


Figura 6.3.

La condición para que esto suceda es que el diámetro de la circunferencia θ_2 sea igual o mayor que el radio de la θ_1 , es decir, que:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \geq \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2},$$

equivalente a:

$$\sigma_x \sigma_y \leq \tau_{xy}^2.$$

Cuando α está comprendido entre α_1 y α_2 la tensión normal tiene un signo y fuera de este intervalo tiene el contrario. Las tensiones principales son una de tracción y otra de compresión.

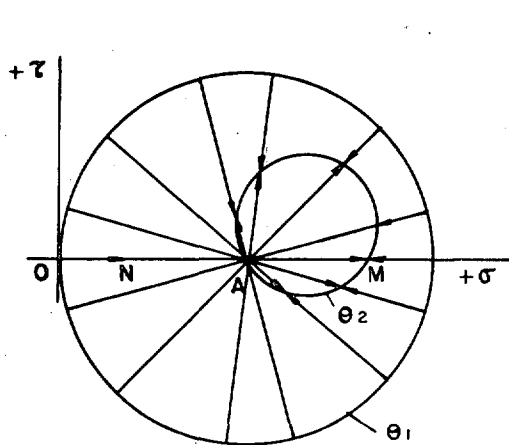


Figura 8.1.

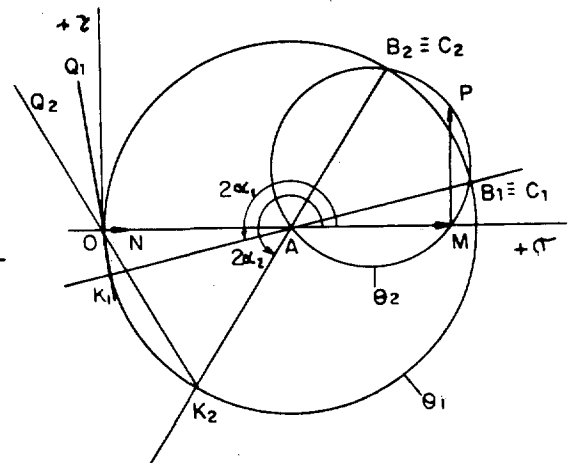


Figura 8.2.

9. Construcción cuando $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_1$, $\tau_{xy} = 0$. Equivalencia con la construcción de Mohr.

Sobre la figura 9.1 se muestran superpuestas la construcción gráfica descrita y la de Mohr. La construcción nuestra da:

$$CB = \sigma_a, \quad BP = \tau_a,$$

y la de Mohr:

$$OF = \sigma_a, \quad FG = \tau_a.$$

La equivalencia de ambas construcciones resulta de la igualdad de los triángulos rectángulos AFG y ABM, lo que da:

$$FG = BM = BP = \tau_a,$$

y también:

$$AF = FB, \quad OA = CA.$$

