NOTAS SOBRE CALCULO DE ARCOS BIARTICULADOS, ATIRANTADOS Y DE EMPOTRAMIENTOS DUDOSOS

Por ALBERTO VIADER MUÑOZ, Ingeniero de Caminos.

Deduce el autor en el presente trabajo fórmulas que permiten la utilización, para los arcos arriba indicados, de las tablas para cálculo de arcos empotrados, reduciendo así el trabajo a simples operaciones aritméticas.

Es muy sencillo en sus fundamentos, y su desarrollo puede verse en los tratados de Mecánica elástica, de Mecánica aplicada a las construcciones, etc. Pero es complicado — un poco menos que el del arco empotrado — cuando se lleva a la práctica por las intrincadas y largas fórmulas que es preciso manejar. Además, son muy pocos los autores que las dan con suficiente amplitud y menos — casi ninguno — los que las tabulan. En cambio, los arcos empotrados — más estudiados que éstos por ser más utilizados — se calculan fácilmente al disponer de numerosas tablas que abrevian su cálculo y lo reducen a simples operaciones aritméticas. Por ello es interesante deducir fórmulas que permitan pasar de unos arcos a otros, y especialmente de los empotrados a los biarticulados, pues pueden presentarse casos en que se dude de haber conseguido el empotramiento teórico y, por consiguiente, de la resistencia del arco; este caso intermedio entre ambos, se presenta con frecuencia en la sustitución de puentes metálicos anticuados en los que se pueden aprovechar las pilas, que son, racionalmente, de poco espesor y permiten empotramientos de poca profundidad y, por tanto, de dudosa garantía en cuanto a su propiedad fundamental: la imposibilidad de giro.

En este trabajo se obtienen las fórmulas que permiten pasar rápidamente del arco empotrado al biarticulado y al atirantado, conformándonos en ambos casos con deducir la única incógnita hiperestática: el empuje del arco. Y como derivación de las primeras, las correspondientes al arco de empotramientos dudosos.

Utilizamos la notación del libro del que suscribe, *Cálculo tabular de arcos empotrados*, y partimos de las fórmulas en él deducidas; la directriz es la catenaria

$$y = y_1 (\mathrm{Ch}\, \xi k - 1),$$

y la ley de inercias:

$$\frac{I_c}{I \cos \alpha} = 1 - (1 - n) \frac{y}{f}.$$

La primera es adecuada, sin ninguna reserva para todos los arcos; la segunda, también lo es en los arcos aquí considerados si se da a n un valor adecuado.

El arco empotrado sometido a una sobrecarga cualquiera, en su arranque izquierdo debe soportar μ_P, A_P, H_P, y en el otro, actúa μ'_P.

Si ese arco sufre el giro φ_a del arranque izquierdo, deberá soportar:

$$\left.\begin{aligned} \mu_{\varphi_a} &= k_1 \varphi_a \\ A_{\varphi_a} &= -\frac{2 E I_c}{\Delta_2 l} \varphi_a \\ H_{\varphi_a} &= \frac{E I_c y_2}{\Delta_1} \varphi_a \\ \mu'_{\varphi_a} &= -\beta k_1 \varphi_a \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Si gira el apoyo derecho el ángulo φ_b, deberá soportar:

$$\left.\begin{aligned} \mu_{\varphi_b} &= \beta k_1 \varphi_b \\ A_{\varphi_b} &= -\frac{2 E I_c}{\Delta_2 l} \varphi_b \\ H_{\varphi_b} &= -\frac{E I_c y_2}{\Delta_1} \varphi_b \\ \mu'_{\varphi_b} &= -k_1 \varphi_b. \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

Si aumenta la luz en Δl, deberá soportar:

$$\left.\begin{aligned} \mu_{\Delta l} &= -\frac{E I_c y_2}{\Delta_1} \Delta l \\ A_{\Delta l} &= 0 \\ H_{\Delta l} &= -\frac{E I_c}{\Delta_1} \Delta l \\ \mu'_{\Delta l} &= -\frac{E I_c y_2}{\Delta_1} \Delta l \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

Si actúan estas solicitaciones simultáneamente con la sobrecarga considerada en primer lugar, resultarán los totales siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \mu_P + \mu_{\varphi_a} + \mu_{\varphi_b} + \mu_{\Delta l} \\ A &= A_P + A_{\varphi_a} + A_{\varphi_b} + A_{\Delta l} \\ H &= H_P + H_{\varphi_a} + H_{\varphi_b} + H_{\Delta l} \\ \mu' &= \mu'_P + \mu'_{\varphi_a} + \mu'_{\varphi_b} + \mu'_{\Delta l} \end{aligned}\right\} \qquad [4]$$

En el arco biarticulado deberá suceder que:

$$\left.\begin{array}{r} \Delta l = 0 \\ \mu = 0 \\ \mu' = 0 \end{array}\right\} \qquad [5]$$

En el atirantado con tirante flexible:

$$\left.\begin{array}{r} \Delta l = \dfrac{H}{\omega_T} \dfrac{l}{E_T} \\ \mu = 0 \\ \mu' = 0 \end{array}\right\} \qquad [6]$$

en las que ω_T representa la sección del tirante y E_T su coeficiente de elasticidad.

Arco biarticulado.

Sustituyendo los valores por [1], [2] y [3] en las ecuaciones [4] y obligando a cumplir las condiciones [5], se obtienen los valores siguientes:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_a^b &= \frac{\mu_P + \beta \mu'_P}{(\beta^2 - 1) k_1} \\ \varphi_b^b &= - \frac{\mu'_P + \beta \mu_P}{(\beta^2 - 1) k_1} \end{aligned}} \qquad [7]$$

que, sustituídos en [4], dan las fórmulas generales:

$$\mu = \mu' = 0;$$

$$\boxed{\begin{aligned} A^b &= A_P + A_{\varphi_a} + A_{\varphi_b} = A_P - \frac{2 E I_c}{\Delta_2 l} (\varphi_a + \varphi_b) = \\ &= A_P + \frac{2 E I_c}{\Delta_2 l} \frac{\mu_P - \mu'_P}{(\beta + 1) k_1} = A_P + \frac{\mu_P - \mu'_P}{l} \\ H^b &= H_P + H_{\varphi_a} + H_{\varphi_b} = H_P + \frac{E I_c y_2}{\Delta_1} (\varphi_a - \varphi_b) = \\ &= H_P + \frac{E I_c y_2}{\Delta_1} \frac{\mu_P + \mu'_P}{(\beta - 1) k_1} = H_P - \frac{y_2}{\Delta_1} \frac{\mu_P + \mu'_P}{2\left[\dfrac{y^2_2}{\Delta_1} + \dfrac{1}{\Delta_3}\right]} \end{aligned}} \qquad [8]$$

que, simplificadas, quedan reducidas, en el caso de fuerza aislada, a:

$$\boxed{\begin{aligned} A^b &= \frac{\xi'}{2} P \text{ (isostática)} \\ H^b &= \frac{X'_1 \dfrac{\Delta_1}{\Delta_3} + X'_2 y_2}{y^2_2 + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_3}} P \end{aligned}} \qquad [9]$$

La primera de estas ecuaciones nos muestra lo que ya sabíamos, que la reacción vertical es isostática; igual a la de la viga simplemente apoyada.

En el caso de carga variable de p_a a p_c, según la línea de carga, resulta:

$$\boxed{\begin{aligned} A^b &= p_c \frac{l}{2k} \operatorname{Sh} k \text{ (isostática)} \\ H^b &= \frac{p_c}{y_1} \left(\frac{l}{2k}\right)^2 \frac{y^{*2}_2 + \dfrac{\Delta^*_1}{\Delta^*_3}}{y^{*2}_2 + (1 + \nu) \dfrac{\Delta^*_1}{\Delta^*_3}} \end{aligned}} \qquad [10]$$

Las variaciones de temperatura y demás efectos análogos se acusan de la manera siguiente:

$$\boxed{\begin{aligned} A^b &= 0 \text{ (isostática)} \\ H^b &= \pm \frac{E I_c \alpha_t t l}{\Delta_1 + \Delta_3 y^2_2} \end{aligned}} \qquad [11]$$

El frenado o arranque, supuesto actuando en clave, produce los efectos siguientes:

$$\boxed{\begin{aligned} A^b &= \cdot \frac{f}{l} F \text{ (isostática)} \\ H^b &= - \frac{1}{2} F \end{aligned}} \qquad [12]$$

En el caso de un giro del apoyo izquierdo (no de la sección de arranques), resulta, sustituyendo valores en las fórmulas generales [8]:

$$\left.\begin{array}{r} A^b = 0 \\ H^b = 0 \end{array}\right\}$$

como debía suceder, ya que el giro de los apoyos en nada afecta al arco.

Si se produce un desplazamiento horizontal de los apoyos Δl, resultan:

$$\boxed{\begin{aligned} A^b &= 0 \text{ (isostática)} \\ H^b &= - \frac{E I_c \Delta l}{\Delta_1 + \Delta_3 y^2_2} \end{aligned}} \qquad [13]$$

Si se produce un asiento en el apoyo izquierdo, sustituyendo valores en las fórmulas generales [8], resulta:

$$A^b = 0$$
$$H^b = 0$$

como debía suceder.

Arco atirantado.

Introduciendo los valores dados por [1], [2] y [3] en las ecuaciones [4] y obligando a cumplir las condiciones [6], se pueden obtener las fórmulas que nos dan los valores de H y A en los diversos casos de carga; pero se obtienen más fácilmente partiendo de las deducidas para el arco biarticulado, suponiéndolo afectado por un aumento de la luz:

$$\Delta l = \frac{H^a l}{\omega_T E_T}, \qquad [14]$$

que es el alargamiento del tirante.

En efecto, en el arco biarticulado sometido a una sobrecarga cualquiera tendremos un empuje horizontal H^b, al que será preciso sumar el debido a Δl, fórmula [13], para obtener el empuje H^a del arco atirantado. Traducido esto a fórmulas, obtenemos lo siguiente:

$$H^a = H^b - \frac{E I_c \Delta l}{\Delta_1 + \Delta_3 y^2_2} = H^b - \frac{E I_c}{\Delta_1 + \Delta_3 y^2_2} \times \frac{H^a l}{\omega_T E_T};$$

de donde:

$$\boxed{H^a = H^b \times \frac{1}{1 + \frac{E I_c}{\Delta_1 + \Delta_3 y^2_2} \times \frac{l}{\omega_T E_T}}} \qquad [15]$$

fórmula fundamental que pone en relación el arco atirantado de tirante flexible con el biarticulado.

Bastará, pues, afectar del coeficiente:

$$\boxed{C = \frac{1}{1 + \frac{E I_c}{\Delta_1 + \Delta_3 y^2_2} \times \frac{l}{\omega_T E_T}}} \qquad [16]$$

los segundos miembros de las fórmulas [8] a [12], que nos dan los valores del empuje del arco biarticulado para obtener el del atirantado.

Así, resulta:

Fuerza aislada:

$$H^a = C \frac{X'_1 \frac{\Delta_1}{\Delta_3} + X'_3 y_2}{y^2_2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_3}} P \qquad [17]$$

Carga variable de p_a a p_c, según la línea de carga:

$$H^a = C \frac{p_c}{y_1} \left(\frac{l}{2k}\right)^2 \times \frac{y^{*2}_2 + \frac{\Delta^*_1}{\Delta^*_3}}{y^{*2}_2 + (1+\nu)\frac{\Delta^*_1}{\Delta^*_3}} \qquad [18]$$

Variaciones de temperatura y efectos análogos:

$$H^a = \pm C \frac{E I_c \alpha t_a l}{\Delta_1 + \Delta_3 y^2_2} \mp \frac{E I_c \alpha_T t_T l}{\Delta_1 + \Delta_3 y^2_2} \qquad [19]$$

(α, t_a son el coeficiente de dilatación térmica y la variación de temperatura en el arco; α_T, t_T son estos mismos coeficientes correspondientes al tirante.)

El alargamiento del tirante, según [14] y [15], será:

$$\Delta l_T = \frac{H^a l}{\omega_T E_T} = C \frac{H^b l}{\omega_T E_T}. \qquad [20]$$

Si los apoyos del arco biarticulado sufren un desplazamiento Δl, el empuje producido por esta causa es el dado por la expresión [13]. Si Δl es negativo, H^b es positivo y produce en el arco una disminución de momentos flectores. Si ese acercamiento de los apoyos se produce por el tensado del tirante mediante la acción de gatos hidráulicos que alarguen éste y acorten el arco, o con cualquier otro medio semejante, el valor de Δl será el que nos dé la fórmula [13], si partimos de un determinado valor del empuje, y, viceversa, si partimos de un valor conocido de Δl, deduciremos el empuje de la misma fórmula.

Arco de empotramientos dudosos.

La característica principal de un arco empotrado en sus arranques es la imposibilidad de giro de esas secciones. Si lo liberamos de la coacción que ejercen los apoyos sobre él para girar libremente se convierte en biarticulado y las secciones en arranques giran los ángulos φ^b_a y φ^b_b, cuyos valores son los dados por las fórmulas [7].

Si se duda de la eficacia del apoyo en cuanto a su indeformabilidad de giro por falta de rigidez del mismo o por otras causas, puede hacerse la comprobación de la estabilidad del arco admitiendo que uno o los dos apoyos giren un cierto ángulo, que será inferior al que nos dan las fórmulas [7], y que puede valorarse a sentimiento por un coeficiente θ_a o θ_b, menor que la unidad, aplicado a φ^b_a y φ^b_b, que será la relación entre el ángulo girado con empotramiento dudoso y el girado cuando existe libertad de giro.

Es decir:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi^d_a &= \theta_a\, \varphi^b_a = \theta_a \frac{\mu_P + \beta\,\mu'_P}{(\beta^2 - 1)\,k_1} \\ \varphi^d_b &= \theta_b\, \varphi^b_b = -\,\theta_b \frac{\mu'_P + \beta\,\mu_P}{(\beta^2 - 1)\,k_1} \end{aligned}} \qquad [21]$$

que, introducidos en las ecuaciones [4] y teniendo en cuenta las [1] y [2], nos dan las fórmulas fundamentales siguientes:

$$\boxed{\begin{aligned} \mu^d &= \mu_P + \theta_a\, k_1 \varphi^b_a + \theta_b\, \beta\, k_1\, \varphi^b_b = \\ &= \mu_P + \theta_a \frac{\mu_P + \beta\,\mu'_P}{\beta^2 - 1} - \theta_b\, \beta \frac{\mu'_P + \beta\,\mu_P}{\beta^2 - 1} \\ A^d &= A_P - \frac{2\,E\,I_c}{\Delta_2\, l}\left[\theta_a \frac{\mu_P + \beta\,\mu'_P}{(\beta^2 - 1)\,k_1} - \right. \\ &\qquad \left. -\ \theta_b \frac{\mu'_P + \beta\,\mu_P}{(\beta^2 - 1)\,k_1}\right] \\ H^d &= H_P + \frac{E\,I_c\, y_2}{\Delta_1}\left[\theta_a \frac{\mu_P + \beta\,\mu'_P}{(\beta^2 - 1)\,k_1} + \right. \\ &\qquad \left. +\ \theta_b \frac{\mu'_P + \beta\,\mu_P}{(\beta^2 - 1)\,k_1}\right] \end{aligned}} \qquad [22]$$

Si $\theta_a = \theta_b = \theta$, las fórmulas precedentes se convierten en las siguientes:

$$\boxed{\begin{aligned} \mu^d &= \mu_P\,(1 - \theta) \\ A^d &= A_P + \theta \frac{\mu_P - \mu'_P}{l} \\ H^d &= H_P - \theta\, y_2 \frac{\mu_P + \mu'_P}{2\left[y_2^2 + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_3}\right]} \end{aligned}} \qquad [23]$$

que son realmente muy sencillas.