

con un coeficiente de reducción $m = 2$ y repartición triangular; siendo h_1 altura de la presa, h altura del

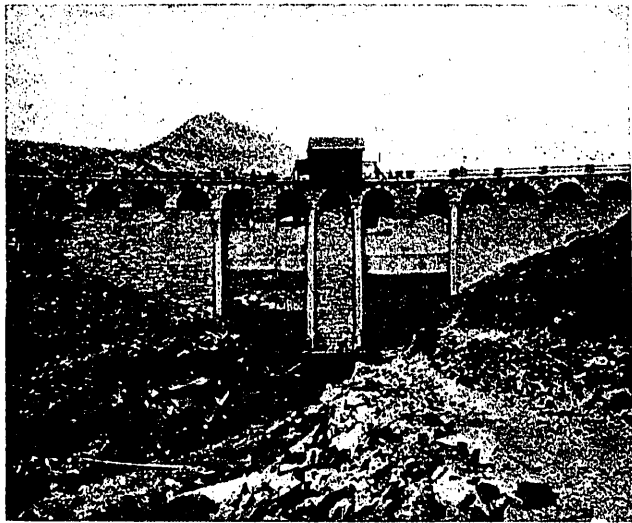


Fig. 8.ª Vista exterior de la presa, concluida

embalse, Hg empuje del hielo, γ densidad de la fábrica y Kh el espesor en la base, se obtuvo:

$$K = \sqrt{\frac{h^3 + 6Hgh}{h_1^3\gamma - mhh_1^3}}$$

la sección metálica necesaria para contrarrestar el empuje del hielo fué de 3 340 mm².

La coronación a 3,50 m por encima del máximo embalse está armada con redondos y perfiles hasta 6 m por debajo de la coronación, para que por sí solos puedan resistir el esfuerzo cortante producido por el empuje del hielo.

La arena constituyó un grave problema, resuelto mediante una instalación de trituración colocada al pie de los afloramientos de caliza sacaroidea, ya que las pruebas que se hicieron con el molido del granito dieron una arena micácea y sensiblemente caolinizada, completamente inaceptable.

La construcción se llevó a cabo en 120 días de trabajo útiles, con un volumen de 5 000 m³ en lugar de 1 500 m³ de la presa en arco único de sillería, y de 1 200 m³ de la presa en arco de hormigón.

El coste sobrepasó a los dos millones de liras, de los cuales unas 600 000 liras fueron para trabajos accesorios y provisionales.

Las pequeñas filtraciones existentes a través de las fisuras del granito se han disminuído considerablemente, enturbiando el agua por la arcilla y la arena, en su terminación y antes de su explotación.

Dejemos para otro artículo un ejemplo interesante de una presa sobre el torrente Chiusella, pues éste se va haciendo largo e «indigesto».

José GARCÍA AUGUSTIN
Ingeniero de Caminos

Esfuerzos secundarios

I

Por el profesor de la asignatura de Construcciones Metálicas, D. Domingo Mendizábal, fué encargado, en el curso pasado, del desarrollo de este tema. Muy poco, casi nada, pude encontrar en los libros y revistas técnicas españolas, y el deseo de llenar en parte este vacío y de poder facilitar u orientar la labor de quien tuviera alguna vez que entenderse con ellos, me han impulsado a escribir estas cuartillas; quiéjotescas podríamos llamarlas, por la magnitud del tema y la pobreza de medios de quien se atreve a pergeñarlas; mas espero quedará, en gracia a la buena intención, perdonada la osadía del intento.

Y entremos en materia. Siguiendo en parte las clasificaciones dadas por los técnicos extranjeros que se ocuparon de ellos, los clasifiqué en mi estudio con vistas a los puentes metálicos, en los cinco grupos siguientes:

- 1.º Esfuerzos secundarios debidos a la rigidez de las uniones.
- 2.º Esfuerzos secundarios debidos a la deformación del marco transversal.
- 3.º Variación del esfuerzo axial en las distintas partes de una barra por pandeo, excentricidad de las uniones, peso propio y carga transversal.
- 4.º Esfuerzos secundarios en el plano horizontal debidos a la deformación de las cabezas de las vigas y piso.

5.º Esfuerzos secundarios debidos a otras causas.

Vamos a estudiar los debidos a la rigidez de los nudos, que tienen muchísimo interés, no sólo en las construcciones metálicas, sino en tantas estructuras de hormigón armado, que aun siguen las formas constructivas metálicas.

Esfuerzos secundarios debidos a la rigidez de las uniones

Varios han sido los métodos de cálculo propuestos para resolver el problema: entre ellos parecen ser más aplicados los de Mohr, Manderla-Winkler y Müller-Breslau. Son estos métodos los menos pesados, ya que en sí el problema, aunque sencillo, es abrumador. Indicaremos sólo los de Manderla-Winkler y el de Mohr, que han sido muy aplicados en el cálculo de las colosales estructuras norteamericanas.

Descansa la teoría sobre tres supuestos:

- 1.º Conservación del ángulo entre barras en el nudo.
- 2.º Libertad de flexión de las mismas entre sus extremos.
- 3.º Constancia de su momento de inercia.

El primer supuesto depende de la relativa rigidez de las cartelas, roblones de unión y aun de las mismas barras. Si ocurre alguna rotación relativa de alguna barra, se reducen los esfuerzos secundarios. Según experiencias norteamericanas, suizas y ale-

manas este supuesto «no introduce error de consideración en los resultados».

El segundo y tercer supuesto no se cumplen, y por esta causa aumentan los esfuerzos secundarios. La tendencia actual es a considerar el efecto de las cartelas y dos han sido las formas de hacerlo. Según el ingeniero norteamericano D. R. Steinman, el valor del momento de inercia puede tomarse como constante entre cartelas y suponerlo variable con crecimiento uniforme desde el principio de la cartela hasta el fin teórico de la barra. Este procedimiento se usó en el cálculo del puente en arco sobre el Niágara, del Ferrocarril Central de Michigán.

Otra manera de tener en cuenta el efecto de las cartelas es la propuesta por M. Ros, en la Memoria presentada al Congreso de Zurich, fórmula a la que dieron actualidad las experiencias llevadas a cabo por la Asociación Suiza de Constructores de Puentes y Estructuras Metálicas, pero que había sido propuesta por Mesnager en 1889¹. La manera propuesta ha sido multiplicar el momento secundario obtenido para la longitud teórica de la barra por la relación $\frac{l}{l_n}$, siendo l la longitud teórica y l_n la real entre cartelas. Este valor del momento se atribuye a la sección de unión de la barra y cartela.

Acceptando esta manera de tener en cuenta el efecto de las cartelas, nace la duda de si son elementos de rigidez o de debilidad, ya que esta corrección hace aumentar los esfuerzos secundarios.

Método de Manderla-Winkler

En 1879 publicó Manderla su método, que obtuvo el premio ofrecido por la Universidad Técnica de Munich a quien de un modo satisfactorio resolviese este problema. La solución del mismo por el método exacto es muy laboriosa, y el valor de los momentos de empotramiento generalmente difieren poco de los encontrados por un método en el cual los esfuerzos directos no son considerados (Manderla-Winkler); es éste aproximado el generalmente conocido y usado.

Se considera una célula triangulada; si las células son cuadrangulares, el suponer miembros imaginarios con sección transversal nula y carga también nula, transforma tales polígonos en triángulos. Se supone existen dos vigas: una con nudos rígidos y otra con nudos articulados. Y si pudiesen ser intercambiadas la posición de los nudos de la primera con una cierta carga, correspondería a la posición de los nudos de la segunda bajo la misma carga.

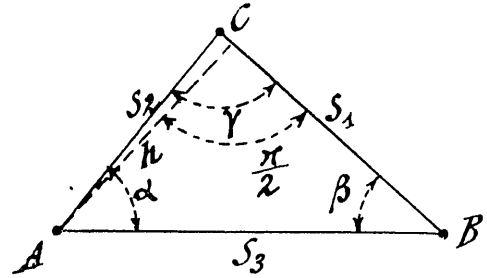
Cuando una viga articulada se carga, todos los miembros sufren alguna extensión o compresión y las posiciones de los nudos cambian de acuerdo con estas deformaciones. Sin embargo, ocurre que todos los miembros permanecen perfectamente rectos, no se introducen esfuerzos de flexión, se cambian los ángulos de las células y los ángulos entre barras adyacentes de un nudo.

Si los nudos fueran fijos y se emplease algún medio para forzar los elementos hasta la posición en la cual los ángulos fueran los mismos que antes de cargarlos, los miembros de la viga triangulada tomarían

¹ M. Mesnager: *Annales des Ponts et Chaussées*. «Fatigues réelles et les fatigues calculées dans un pont à grands mailles.»

la posición y forma de los miembros correspondientes de la empotrada bajo la misma carga. El problema, por tanto, es el calcular las variaciones angulares entre las barras adyacentes de las vigas articuladas y el valor del momento de empotramiento en cada extremo necesario para hacer nulas estas variaciones.

Variaciones angulares en la célula triangular.—Sean l_1, l_2, l_3 las longitudes de los lados de la célula triangular representada por la figura 1.^a, $\Delta l_1,$



$\Delta l_2, \Delta l_3$ sus variaciones lineales, α, β, γ los ángulos y $\Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \gamma$ las variaciones de los mismos, tendremos

$$l_1 = l_2 \cos \gamma + l_3 \cos \beta$$

y de aquí

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \gamma - l_2 \sin \gamma \cdot \Delta \gamma + \Delta l_3 \cos \beta - l_3 \sin \beta \cdot \Delta \beta$$

Como la suma de los tres ángulos de un triángulo vale 180° antes y después de la deformación

$$\Delta \alpha + \Delta \beta + \Delta \gamma = 0$$

y de aquí

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \gamma + \Delta l_3 \cos \beta - h \Delta \gamma - h \Delta \beta = \Delta l_2 \cos \gamma + \Delta l_3 \cos \beta - h(\Delta \gamma + \Delta \beta) = \Delta l_2 \cos \gamma + \Delta l_3 \cos \beta + h \Delta \alpha$$

y si los esfuerzos unitarios en los lados son s_1, s_2 y s_3 , tendremos que

$$\Delta l_1 = \frac{s_1}{E} l_1 \quad \Delta l_2 = \frac{s_2}{E} l_2 \quad \Delta l_3 = \frac{s_3}{E} l_3$$

$$s_1 l_1 = s_2 l_2 \cos \gamma + s_3 l_3 \cos \beta + h \Delta \alpha E$$

$$- \Delta \alpha E = \frac{s_2 l_2}{h} \cos \gamma + \frac{s_3 l_3}{h} \cos \beta - \frac{s_1 l_1}{h}$$

y como

$$h = l_2 \sin \gamma = l_3 \sin \beta \quad y \quad l_1 = l_2 \cos \gamma + l_3 \cos \beta$$

$$- \Delta \alpha E = s_2 \cotg \gamma + s_3 \cotg \beta - s_1 \cotg \gamma - s_1 \cotg \beta$$

$$E \Delta \alpha = (s_2 - s_1) \cotg \gamma + (s_3 - s_1) \cotg \beta$$

y de igual forma

$$E \Delta \beta = (s_2 - s_3) \cotg \alpha + (s_2 - s_1) \cotg \gamma$$

$$E \Delta \gamma = (s_3 - s_1) \cotg \beta + (s_3 - s_2) \cotg \alpha$$

Fácilmente se recuerdan estas ecuaciones; la variación angular de uno de los ángulos por E es la suma de dos productos, cada uno de los cuales es el esfuerzo del lado opuesto menos el adyacente por la cotangente del ángulo comprendido entre los dos.

Relación entre los ángulos de flexión de las barras concurrentes en un nudo.—Consideremos un nudo de

una estructura n . Las líneas $n - 1, n - 2, n - 3 \dots$ son las de unión de los nudos después de la deformación. Las líneas llenas muestran las formas de las barras deformadas (fig. 2.^a). Los ángulos $\tau_{n1}, \tau_{n2}, \tau_{n3}$ y τ_{n4} representan los ángulos de flexión de las barras

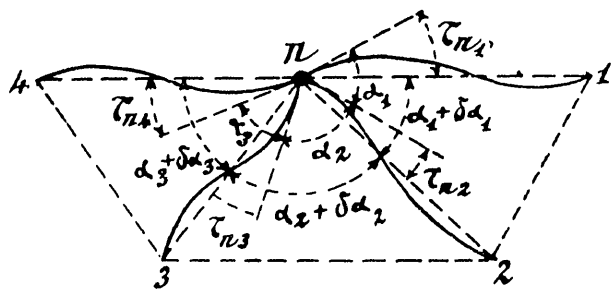


Fig. 2.^a

concurrentes en el nudo n . Los ángulos α_1, α_2 y α_3 son los ángulos iniciales entre $1n2, 2n3$ y $3n4$. Después de la deformación estos ángulos son $\alpha_1 + \delta\alpha_1, \alpha_2 + \delta\alpha_2, \alpha_3 + \delta\alpha_3$. Si tomamos el valor de uno de ellos, τ_{n1} , como referencia, podemos poner el valor de otro cualquiera de ellos en función de éste, como sigue

$$\begin{aligned} \tau_{n2} &= \tau_{n1} + \delta\alpha_1 \\ \tau_{n3} &= \tau_{n1} + \delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 \\ \tau_{n4} &= \tau_{n1} + \delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 + \delta\alpha_3 \end{aligned}$$

en general puede escribirse

$$\tau_{nm} = \tau_{n1} + \sum_1^m \delta\alpha$$

en donde τ_{nm} representa un valor de τ , τ_{n1} es el ángulo de referencia buscado y $\sum_1^m \delta\alpha$ da la suma de las variaciones angulares hasta la barra nm . Generalmente se toma como referencia el valor τ de la primera barra encontrada, recorriendo el nudo desde el exterior en el sentido de las agujas de un reloj.

Momentos de empotramiento en los nudos.—Consideremos el triángulo ABC (fig. 3.^a), que representa

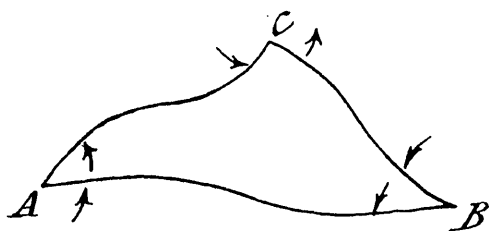


Fig. 3.^a

la célula triangular de la figura 1.^a deformada, cuando obligamos a los ángulos a tener el mismo valor que antes de cargarla

La barra AB la representa la figura 4.^a

Supongamos que los momentos de empotramiento sean, en A y B , M_1 y M_2 , los dos en sentido contrario al giro de las agujas del reloj.

Los esfuerzos verticales en A y B serán iguales y de sentido contrario, ya que son las únicas fuerzas que actúan en este sentido en la barra y está en equilibrio. Supongamos sea P el esfuerzo resistido por la barra, en nuestro caso tensión.

El momento en un punto N a la distancia x de A es

$$M_x = M_1 - Py - V_1x;$$

como y es muy pequeño puede despreciarse $-Py$ (ésta es la simplificación de Winkler), y queda

$$M_x = M_1 - V_1x;$$

la ecuación diferencial de la elástica será

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = V_1x - M_1;$$

esta ecuación puede resolverse fácilmente por integración directa, integrando una vez

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{V_1x^2}{2} - M_1x + C,$$

La cual da el valor de la tangente en un punto de la elástica. Integrando de nuevo

$$EIy = \frac{V_1x^3}{6} - M_1 \frac{x^2}{2} + Cx + D,$$

la cual da el valor de y del punto N . Determinare-

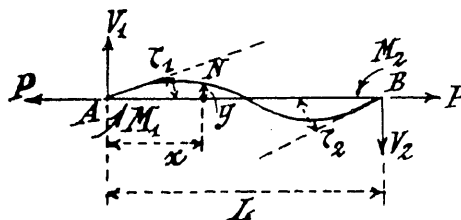


Fig. 4.^a

mos C y D porque para $x = 0, x = L, y = 0$; luego

$$D = 0 \quad C = \frac{M_1L}{2} - \frac{V_1L^2}{6}$$

Para $x = 0 \quad \frac{dy}{dx} = \tau_1$; luego

$$EI\tau_1 = \frac{M_1L}{2} - \frac{V_1L^2}{6}$$

Como $V_1L = M_1 + M_2$, tendremos

$$\tau_1 = \frac{L}{6EI} (2M_1 - M_2)$$

y en el otro extremo

$$\tau_2 = \frac{L}{6EI} (2M_2 - M_1).$$

Sin considerar la simplificación de Winkler, se llega en el método de Manderla a los valores

$$\tau_1 = \frac{L}{6EI} (2cM_1 - dM_2)$$

$$\tau_2 = \frac{L}{6EI} (2cM_2 - dM_1)$$

que son los anteriores cuando $c = d = L$, y esto ocurre cuando $P = 0$, de modo que la simplificación ha sido el despreciar el efecto de los esfuerzos principales en los momentos de empotramiento.

De las ecuaciones anteriores podemos deducir que

$$M_1 = \frac{2EI}{L} (2\tau_1 + \tau_2)$$

$$M_2 = \frac{2EI}{L} (2\tau_2 + \tau_1)$$

a ecuaciones parecidas se llega en el método de Manderla, sin la simplificación de Winkler.

La relación entre los ángulos de flexión que concurren en un nudo es, según demostramos antes,

$$\tau_{nm} = \tau_{n1} + \sum_1^{m-1} \delta\alpha$$

La condición de que la suma de momentos de empotramiento en un nudo es cero, dará

$$M_{n1} + M_{n2} + M_{n3} + M_{n4} = 0$$

luego

$$\frac{2EI_{n1}}{L_{n1}} (2\tau_{n1} + \tau_{1n}) + \frac{2EI_{n2}}{L_{n2}} (2\tau_{n2} + \tau_{2n}) + \frac{2EI_{n3}}{L_{n3}} (2\tau_{n3} + \tau_{3n}) + \frac{2EI_{n4}}{L_{n4}} (2\tau_{n4} + \tau_{4n}) = 0$$

llamando $\frac{I}{L} = K$, tendremos

$$K_{n1}(2\tau_{n1} + \tau_{1n}) + K_{n2}(2\tau_{n2} + \tau_{2n}) + K_{n3}(2\tau_{n3} + \tau_{3n}) + K_{n4}(2\tau_{n4} + \tau_{4n}) = 0$$

por cada nudo podremos establecer una ecuación como ésta. Refiriendo todos los ángulos a los ángulos de flexión de referencia en cada nudo, como para cada nudo hay uno, tendremos, finalmente, un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas, de donde deduciremos los ángulos de flexión de referencia, y por la fórmula

$$\tau_{nm} = \tau_{n1} + \sum_1^{m-1} \delta\alpha$$

deduciremos los restantes. Conocidos éstos podremos determinar los momentos flectores en los empotramientos, y por $f = \frac{My}{I}$ los esfuerzos secundarios.

La dificultad del método está en la eliminación de un sistema de tantas ecuaciones como nudos, y las modificaciones que se han propuesto giran todas sobre este eje.

No podemos detallar este punto, que haría interminables estas cuartillas, y sólo indicaremos los métodos propuestos para resolver el sistema de ecuaciones y dónde se encuentran desarrollados.

Algunos resuelven el sistema por el método de Gauss, y en esta forma se encuentra desarrollado en los Transactions of the American Society of Civil Engineers, volumen 89. Año 1926, páginas 67 a 76.

El método que patrocina Turneare puede encontrarse en el libro *The Theory and practice of Modern Framed Structures*, by S. B. Johnson, C. W. Bryan and F. E. Turneare, 1929. New-York. Tomo II, páginas 390-413, y también en el *Engineering News*, volumen 68, 1912, pág. 438. *The Calculation of Secondary Stresses in Trusses*. F. E. Turneare.

El de Winkler, en su libro *Vorträge über Brückenbau. Theorie der Brücken*. Wien, 1881.

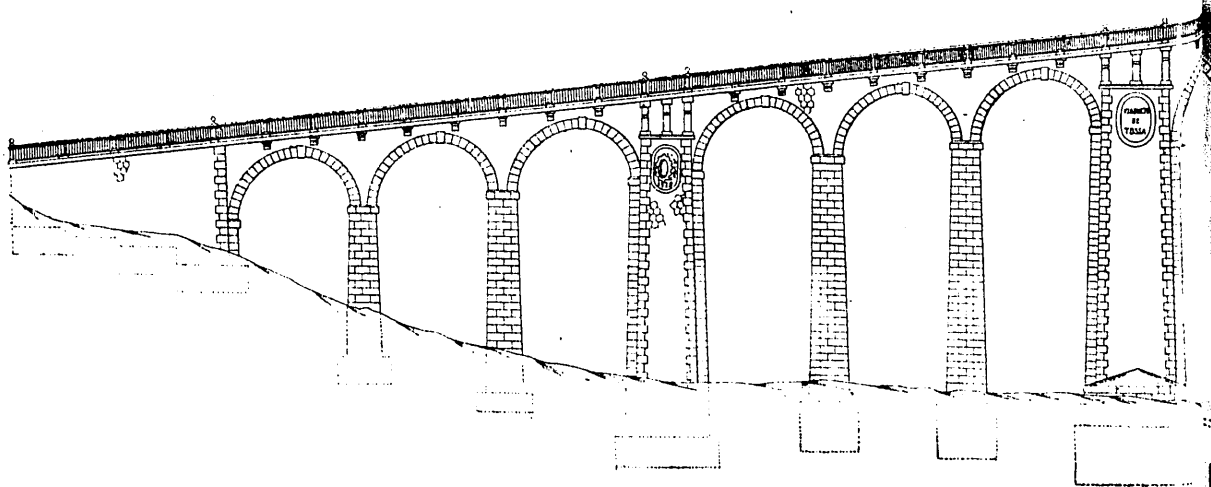
Manderla patrocina el método de las aproximaciones sucesivas, que es el que sigue Waddell y el que tiene mis preferencias, ya que da comprobaciones en todos los pasos. Se encuentra desarrollado en la obra de Waddell, *Bridge Engineering*, tomo I, año 1916.

José JUAN ARACIL
Ingeniero de Caminos

Viaducto del Tossa

A fines del año 1927 recibí el encargo de la Sociedad de Ferrocarriles de Montaña a Grandes Pendientes, dirigida por el competente ingeniero mili-

carril de cremallera que desde Ribas de Freser ha de conducir al santuario de Nuria, en el corazón de los Pirineos Catalanes, que con el de Montserrat com-



tar D. Montserrat Fenech, de proyectar un viaducto especialísimo, cuya planta y perfil se me dió, siendo aquélla una curva de 80 metros de radio y éste una rasante de 12 por 100 de inclinación. Este viaducto había de salvar el barranco de Tossa, en la provincia de Gerona, término de Caralps, y dar paso al ferro-

parte la devoción de los hijos de la región, y que además, está llamado a ser uno de los primeros centros turísticos alpinos de Cataluña, ya que hoy (sin medios de comunicación) es centro de atracción de los pacíficos habitantes del Ampurdán y comarcas de Vich y Barcelona, cuyo amor al campo y a