AÑO XXIX DE LA PUBLICACION. **REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS.** AÑO IX DE LA TERCERA SÉRIE.

MADRID, 30 DE AGOSTO DE 1881.

TOMO XXIX. NÚM. 16.

SUMARIO.

REGLA LOGARÍTMICA.

SU EMPLEO COMO METODO AUXILIAR DE CÁLCULO DE LA TAQUIMETRIA

POR

RAMON PEIRONCELY

Lámina 112.

1. Las fórmulas que sirven para determinar las coordenadas de los diversos puntos de un plano levantado por medio del taquímetro son

$$
\begin{aligned}
D &= g \text{ sen.}^2 \varphi \\
z &= D \text{ cot. } \varphi - h \\
x &= D \text{ sen. } \theta \\
y &= D \text{ cos. } \theta
\end{aligned}
$$

en las cuales representan

g, el número generador dado por las lecturas hechas en la mira.

φ, el ángulo que forma la visual con la vertical.

D, la distancia horizontal al centro de estacion.

h, la altura de mira.

θ, el ángulo horizontal formado con el eje de las y que puede ó no ser la meridiana magnética.

x, y, z, las tres coordenadas del punto observado, tomadas con relacion al orígen de coordenadas de una estacion.

La fórmula que da el valor de z no es calculable por medio de los logaritmos, porque es una resta, y solo podremos valernos de ellos para hallar el valor del primer término D cot. φ, que representaremos por T; de esta manera las cuatro fórmulas que se pueden resolver con los logaritmos son

$$
\begin{aligned}
D &= g \text{ sen.}^2 \varphi & [1] \\
T &= D \text{ cot. } \varphi & [2] \\
x &= D \text{ sen. } \theta & [3] \\
y &= D \text{ cos. } \theta & [4]
\end{aligned}
$$

2. Para encontrar estos diversos valores se pueden seguir varios procedimientos. El primero que se ocurre es efectuar las operaciones indicadas; pero desde luégo se comprende que este método exigiría el hacer cuatro multiplicaciones para cada punto, y el tener que buscar los valores de las líneas trigonométricas sen. φ, cot. φ, sen. θ y cos. θ en una tabla de líneas trigonométricas naturales. Estos valores son siempre decimales con muchas cifras, y áun cuando no se tomaran todas, las operaciones serían bastante largas. Teniendo que repetir estas operaciones para todos los puntos de un plano, se comprende desde luégo que la Taquimetría no tendría gran utilidad empleándola en estas condiciones.

Más ventajoso que esto sería el empleo de los logaritmos, puesto que de esta manera las operaciones numéricas que hay que efectuar se reducen á sumas; pero esto presentaría tambien el inconveniente del mucho tiempo que se emplearía, por el gran número de puntos que se toman para levantar el plano.

3. Con el objeto de abreviar el tiempo que se invierte en los cálculos de que venimos hablando, se emplean otros medios auxiliares para efectuarlos. Uno de los más usados consiste en el empleo de tablas numéricas especiales, de las que unas dan á conocer los valores de D y de T en funcion de g y φ y otras los valores de x é y en funcion de D y θ. Aunque el manejo de estas tablas es muy fácil y bastante cómodo, exige todavía el tener que efectuar varias operaciones aritméticas para un solo punto, en las cuales se necesita emplear una cantidad de trabajo y de tiempo que se disminuye muy considerablemente empleando escalas gráficas, cuya disposicion y uso constituyen el objeto de nuestro estudio y de los cuales vamos á ocuparnos.

REGLA LOGARÍTMICA.

4. La teoría de la *regla logarítmica* ó *regla de cálculo* es sumamente sencilla y conocida de todo el que posee las ideas más fundamentales de la teoría de los logaritmos. Esta regla basta-

ría en rigor para la resolucion de las cuatro fórmulas citadas, como veremos al tratar de la construccion de la escala de los números (9); pero como en estas fórmulas no entran solo números, sino que además hay diferentes líneas trigonométricas, sería necesario buscar en las tablas de logaritmos ó en las de líneas trigonométricas naturales los valores correspondientes á cada caso particular, lo que haría sumamente enojoso y largo el empleo de una sola escala.

Con el objeto de abreviar el mucho tiempo que estas operaciones exigirían, se han dispuesto en una misma regla varias escalas, tantas como distintos argumentos entran en las fórmulas. Esto es lo que se ha hecho en las reglas que se construyen especialmente para los cálculos taquimétricos, en las cuales hay escalas de los logaritmos de los números naturales, de los senos y cosenos, de las tangentes y cotangentes, y finalmente, otra escala llamada de los senos cuadrados.

Aunque pudiéramos hacer ahora la descripcion de todas estas escalas, creemos preferible el ir describiendo su construccion y disposicion conforme nos sean necesarias para el cálculo de las cuatro fórmulas fundamentales, las cuales iremos examinando sucesivamente. Pero ántes de pasar al estudio detallado de cada escala, empezaremos por decir cómo se halla dispuesta la regla logarítmica de qué nos ocupamos.

5. Consta ésta de dos reglas de madera ó de metal de distinto ancho. En el centro de la más ancha hay una ranura por la que puede deslizar la otra segunda regla, que es móvil y á la cual se le da el nombre de *reglilla*. La reglilla se sujeta á la regla fija por medio de una lengüeta con su correspondiente ranura; la lengüeta la tiene unas veces la reglilla (fig. 1) y otras veces, que es lo más general, es la regla la que tiene la lengüeta (fig. 2). La ranura la tiene naturalmente en el primer caso la regla y en el segundo la reglilla. En los bordes exteriores de la reglilla y en los de la ranura grande de la regla fija están grabadas las diferentes graduaciones que hemos enumerado en el número anterior.

Si observamos las fórmulas [1], [2], [3] y [4] vemos que todas ellas tienen la misma forma de producto, en el cual el primer factor es un número. Por esta razon comenzaremos por explicar la construccion de la escala llamada de los números; lo que nos servirá para la explicacion de los demás cálculos de todas las fórmulas.

ESCALA DE LOS NÚMEROS.

6. Esta escala se halla situada en tres partes de la regla; ocupa los dos bordes r, r y r', r' de la ranura de la regla fija (fig. 2 y 3) y uno de los bordes exteriores, el q, q, de la cara B de la reglilla (fig. 2 y 5.)

Para construir esta escala (y lo mismo para todas las demás) se empieza por tomar una cierta magnitud, que en las reglas que describimos suele ser $0^m,20$, y se divide en partes iguales para que se puedan apreciar milésimas de dicha unidad. Esta escala aparece en el borde m, m (fig. 2 y 4) de la cara A de la reglilla junto á las escalas de los senos cuadrados. En la representada en la figura 4, que va marcada con las letras $P.\ I.$, la magnitud que se toma por unidad está dividida en 500 partes iguales, es decir, que cada una de las menores divisiones representa 2 milésimas, pudiéndose apreciar á ojo 1 milésima. La verdadera magnitud de una division de éstas será

$$\frac{0^m,20}{500} = 0^m,0004, \text{ ó sean } \frac{2}{5} \text{ de milímetro.}$$

Una vez tenida esta escala, la construccion de la de los números se hace como vamos á indicar. Se toma sobre una línea recta un punto como orígen, y se llevan á partir de este punto diversas magnitudes, iguales al número de milésimas (tomadas en la escala de partes iguales) que contengan las mantisas de los logaritmos de los números naturales, que se toman en una tabla de logaritmos. En el otro extremo de cada una de estas diferentes magnitudes se marca la cifra ó cifras del número á que corresponde.

De esta manera lo que se obtiene no es más que una tabla gráfica de logaritmos, formada por dos columnas, una de los números y otra de los logaritmos respectivos representados por una magnitud gráfica, cuyo valor numérico se puede deducir sirviéndose de la escala de partes iguales. Se pueden resolver así pues, los dos problemas que se presentan en las tablas de logaritmos; el primero hallar el logaritmo de un número dado; y el segundo, dado un logaritmo, hallar el número á que corresponde; de cuya resolucion nos parece innecesaria la explicacion despues de lo que ya llevamos dicho.

7. Al construir esta escala de los números, se observa que siendo iguales las mantisas de

los logaritmos de los números que, teniendo iguales las cifras significativas, solo difieren en el número de sus cifras enteras, parece que construyendo una escala que comprenda las mantisas de los números del 1 al 10 se tendría lo suficiente para el cálculo, toda vez que no excediendo de **10** las características de los números que se emplean en la Taquimetría, pueden sumarse mentalmente y por separado de las escalas. Pero como quiera que las sumas de las mantisas pueden exceder de **1** unidad, y como por otra parte las distancias medidas con el anteojo del taquímetro varían generalmente entre 10^{m} y 1.000^{m}, hace falta que la escala de los números comprenda dos unidades de longitud, en las que se representan los complementos logarítmicos á log. 10 de los números de 10 á 1.000. Esto en realidad equivale á suprimir la primera unidad de la escala que representase los logaritmos de los números comprendidos entre 1 y 1.000.

Este modo de construir la escala no altera en nada el resultado de los cálculos, porque la regla logarítmica da únicamente (sea dicho de una vez para siempre) el cálculo de las mantisas, haciéndose aparte el de las características. La construccion de la escala es, pues, exactamente lo mismo que hemos dicho. Sea, por ejemplo, el número 20, cuyo logaritmo es 1,301; tomaremos las 301 milésimas de la mantisa sobre la escala de partes iguales y las llevaremos á partir del 10 marcando 20 en el extremo de la magnitud que las representa. Entónces el logaritmo de 20 se puede espresar de dos maneras, diciendo que es la magnitud gráfica comprendida entre el 0 de la escala (que sería donde estuviese marcado el número 1) y el número 20; ó bien que tiene **1** de característica y por mantisa la magnitud comprendida entre los números 10 y 20. Si fuera el número 170 se diría análogamente que su logaritmo está representado por la distancia entre los números 1 y 170, ó que tiene **2** de característica y la distancia entre 100 y 170 por mantisa.

8. Hay que tener en cuenta que, como los logaritmos de los números no varían proporcionalmente á dichos números, las distancias entre los trazos de números que difieran en una misma cantidad no serán iguales, por lo cual las menores divisiones de la escala no aprecian en toda la longitud de ésta las mismas fracciones. Además, como no sería posible marcar todos los números enfrente del trazo de su logaritmo, solo van escritos algunos de ellos, apreciándose los demás por las divisiones secundarias, y por último, á ojo si hay fracciones ó cantidades más pequeñas que las menores divisiones.

Estas dos observaciones son generales para todas las escalas de que vamos á tratar, por lo cual es preciso tenerlas en cuenta en todas ellas. Como se ven perfectamente con la sola inspeccion de la regla, creemos que son innecesarias mayores explicaciones que no harían más que producir confusion.

9. Con las escalas de los números se pueden efectuar con bastante exactitud los cálculos que se reduzcan á multiplicaciones ó divisiones, para los cuales no habrá más que efectuar sumas ó restas de mantisas. Como las cuatro fórmulas del número 1 son productos todas ellas, se podían resolver por este medio, pero no se hace así porque sería preciso efectuar préviamente las reducciones é investigaciones que hemos indicado (4).

Sirviéndose de las escalas de los números y de las partes iguales, se pueden además verificar la elevacion á potencias y extraccion de raíces de números dados, lo mismo que se hace en las tablas de logaritmos.

La regla logarítmica tiene una porcion de aplicaciones para gran número de casos, y en general, se puede decir que su verdadera utilidad es para aquellas operaciones en que no sea necesaria gran exactitud en las cifras de órden inferior, siendo su principal ventaja la comodidad de su manejo y la prontitud con que se encuentran los resultados. Como nuestro objeto es estudiar la aplicacion que se ha hecho de ella á la Taquimetría, no nos ocuparemos de las otras, pudiendo consultarse los tratados é instrucciones que tratan de ellas.

Al final de este trabajo (29) veremos el problema de hallar cuartas proporcionales resuelto con gran facilidad por medio de la regla.

CÁLCULO DE LAS DISTANCIAS.

10. Para calcular las tres coordenadas x, y, z, de un punto se necesita, como ya sabemos, conocer primeramente su distancia horizontal al centro de estacion, cuyo valor viene dado, en

funcion de los datos tomados en el campo, por la fórmula

$$D = g \text{ sen.}^2 \varphi; \qquad [1]$$

y restableciendo el rádio

$$D = g \frac{\text{sen.}^2 \varphi}{R^2}.$$

Tomando los logaritmos se tiene

$$\log. D = \log. g + \log. \text{sen.}^2 \varphi - \log. R^2;$$

expresion que se trasforma en esta otra

$$\log. D = \log. g - (\log. \text{sen.}^2 100^\circ - \log. \text{sen.}^2 \varphi) \quad [a]$$

teniendo en cuenta que $R = \text{sen. } 100^\circ$.

11. Con objeto de efectuar la resta indicada por la fórmula [a] se construyen las dos escalas llamadas de los *senos cuadrados*, que como se vé en el borde m, m, de la cara A de la reglilla (fig. 4), son exactamente iguales en su construccion, y en lo único que difieren es en que están colocadas en sentido contrario la una de la otra. Para construirlas se van dando á φ diferentes valores y por medio de una tabla de logaritmos de líneas trigonométricas, se encuentran los valores correspondientes que resultan para el binomio $\log. \text{sen.}^2 100^\circ - \log. \text{sen.}^2 \varphi$, (que llamaremos $[m]$, ó sea $2 (\log. R - \log. \text{sen. } \varphi)$; y como $R = 10^{10}$, tenemos que $\log. R = \mathbf{10}$ y por lo tanto

$$m = 2 (\mathbf{10} - \log. \text{sen. } \varphi);$$

es decir, que los valores que hay que buscar son para cada caso el doble del complemento logarítmico de log. sen. φ. El número de milésimas que se obtenga de este modo se toma sobre la escala de partes iguales y se lleva despues á partir del punto correspondiente á log. sen. 100° para el binomio m se habrá hecho igual á 0. Estas operaciones se repiten para cada uno de los valores dados á φ, y se marca sobre el extremo de las magnitudes respectivas el valor en grados del ángulo φ, análogamente á lo que se ha dicho para la escala de los números.

Las escalas de los senos cuadrados solo se calculan para valores de φ comprendidos entre 100° y 40°, y como los senos de arcos suplementarios son iguales, sobre los números que se hayan señalado se pueden marcar sus suplementos, puesto que el binomio $[m]$ toma para cada dos de ellos el mismo valor. Los valores de φ pueden variar por esto entre 40° y 160°.

12. Teniendo ya construidas estas escalas se calcula fácilmente el valor de log. D, porque para obtenerlo, segun la fórmula [a], no hay más que restar de log. g, el valor del binomio $[m]$. Esta operacion se efectúa con la regla haciendo coincidir la division que marca el valor dado de φ en la escala de senos cuadrados, con el trazo que corresponde al número generador g en la escala de los números, y viendo cuál es el número que en esta última escala se halla enfrente de sen.² 100°.

Esto que decimos supone que empleamos la escala de senos cuadrados cuyo orígen sen.² 100° está á la izquierda, que es lo que siempre se suele hacer, por lo que más adelante veremos (19). El mismo resultado se obtiene con la otra escala simétrica, poniendo en coincidencia la division sen.² 100° con el valor de g y examinando el número que entónces se encuentra debajo del valor de φ.

13. *Ejemplos.* 1.° Sean $g = 157$, $\varphi = 70^\circ,52$; si calculamos con la escala de senos cuadrados que tiene el orígen á la izquierda, haremos coincidir la division 70°, 52 con la 157 de la escala de los números y el valor de D será el número $125^{m},60$ que está enfrente de la division 100°. La disposicion de los trazos es la siguiente:

Sen.²		100°	70°, 52
Núm.	100	125,6	157

2.° $g = 52{,}50$, $\varphi = 108^\circ, 21$

Sen.²		100°	108°,21	
Núm.	10	51,6	52,5	100

El resultado es $D = 51^{m},60$ (*).

(*Se continuará.*)

(*) Operando con la escala de senos cuadrados que tiene el orígen 100° á la derecha, se hubiera obtenido en los dos ejemplos el mismo resultado, pero la disposicion sería la siguiente, segun lo que hemos indicado en el número anterior.

Sen.²	40° 160°	70°,52	100°
Núm.	100	125, 6	157

Sen ²	40° 160°	108°,21	100°	
Núm.	10	51,6	52, 5	100